Доклады Академии наук СССР
1970. Том 193, № 2

УДК 531.561.2

ФИЗИКА

Л. Г. ХАЗИН, Ф. Х. ЦЕЛЬМАН

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЗОНИРУЮЩИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 30 XII 1969)

В последнее время задача о нелинейном взаимодействии осцилляторов привлекает все большее внимание (см. ([6-10])). Если система резонансами не обладает, то она при помощи специальной замены переменных приводится в любом конечном порядке к системе независимых «квазиосцилляторов» (см. ([2-4])). Таким образом, по существу «взаимодействующими» системами являются резонансные системы. По-видимому, впервые задача о нелинейном взаимодействии резонирующих осцилляторов была рассмотрена в работе Г. Горелика и А. Витта ([1]). В ней были изучены колебания системы с двумя степенями свободы (плоский упругий маятник) в случае соотношения между частотами 2 : 1.

Настоящая работа посвящена изучению резонансных гамильтоновых систем с n степенями свободы.

п. 1. Постановка задачи. Рассматривается консервативная система, описывающая n связанных осцилляторов, с гамильтонианом

$$H(p,q) = H^{(2)}(p,q) + H^{(3)}(p,q) + \ldots + H^{(\alpha)}(p,q) + \ldots \tag{1}$$

Здесь $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $H^{(\alpha)}(p, q)$ — однородный многочлен переменных p, q степени α. В линейном приближении система представляет собой n независимых осцилляторов *, т. е.

$$H^{(2)}(p,q) = {}^1\!/_2 \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu (p_\nu^2 + q_\nu^2) \quad (\beta_\nu > 0), \tag{2}$$

где $\pm i\beta_\nu$ — собственные значения линеаризованной системы с гамильтонианом (1). Будем считать, что среди собственных значений нет кратных, т. е. $\beta_\alpha \neq \beta_\gamma$, если $\alpha \neq \gamma$.

Определение. Говорят, что система (1) обладает резонансом, если

$$\sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha \beta_\alpha = 0, \tag{3}$$

k_α — целые числа. Число $k = \sum_{\alpha=1}^{n} |k_\alpha|$ называют порядком резонанса**. Вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ называют резонансным вектором.

В данной работе будут рассмотрены системы с одним резонансным соотношением (3). Поведение системы будет исследоваться в порядке, равном порядку резонанса.

---

* К такому виду можно привести и произвольную гамильтонианову систему в случае положительной определенности $H^{(2)}(p, q)$.

** Отсутствие кратных частот, в частности, означает, что $k \geqslant 3$.

п. 2. Модельные системы. Пусть порядок низшего резонанса, определяемого соотношением (3), равен $m > 2$. Известно (см., например, [3]), что тогда существует действительная полиномиальная каноническая замена переменных степени $m-1$ $(p, q \to \xi, \eta)$ такая, что система с гамильтонианом (1) переходит в систему с гамильтонианом

$$2H = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \rho_\nu + H_2(\rho) + \ldots + H_\mu(\rho) + \Gamma_m(\rho, \psi) + R(\rho, \varphi). \tag{4}$$

Здесь ρ_α, φ_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ — полярные координаты; $\xi_\alpha = \sqrt{\rho_\alpha} \sin \varphi_\alpha$; $\eta_\alpha = \sqrt{\rho_\alpha} \cos \varphi_\alpha$; $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$; $\psi = \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha \varphi_\alpha$ — резонансная фаза; $H_\nu(\rho)$ — однородный многочлен степени ν переменных ρ; $\mu = [m/2] - 1$; $k = \sum_{\alpha=1}^{n} |k_\alpha| = m$;

$$\Gamma_m(\rho, \psi) = \begin{cases} 2A\sqrt{\rho^{|k|}} \cos \psi, & \text{если } k = 2d+1,\ d \geqslant 1, \\ 2A\sqrt{\rho^{|k|}} \cos \psi + A_l \rho^{|l|}, & \text{если } k = 2d, \quad d \geqslant 2, \end{cases}$$

где $\rho^{|k|} = \rho_1^{|k_1|} \rho_2^{|k_2|} \ldots \rho_n^{|k_n|}$; $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ — целочисленный вектор; $l = \sum_{\alpha=1}^{n} |l_\alpha| = d$; $A_l \rho^{|l|} = \sum_{l=d} A_{l_1 l_2 \ldots l_n} \rho_1^{|l_1|} \rho_2^{|l_2|} \ldots \rho_n^{|l_n|}$.

$R(\rho, \varphi)$ имеет по ρ степень большую, чем m. Гамильтониан

$$\Gamma = 2H - R(\rho, \varphi) \tag{5}$$

совпадает с точностью до членов порядка выше m по переменным ρ с «нормальной формой» (см. [5]) гамильтониана $2H$.

Систему, описываемую этим гамильтонианом, назовем m-модельной системой.

Нетрудно проверить, что

$$J_\alpha = \rho_\alpha - \frac{k_\alpha}{k_1} \rho_1 \quad (\alpha = 2, \ldots, n), \tag{6}$$

$$F = \Gamma - \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha \rho_\alpha \tag{7}$$

являются независимыми интегралами системы (5).

Гамильтониан (5) зависит по существу от $n+1$ переменных ρ_i $(i = 1, \ldots, n)$ и резонансной фазы ψ. При помощи интегралов (6), (7) можно исключить n переменных и получить автономное дифференциальное уравнение первого порядка для одной из переменных ρ_i *.

Замечание 1. Так как в первом приближении ρ_i соответствует энергии i-го осциллятора, то во многих задачах для описания взаимодействия осцилляторов достаточно изучения одного уравнения для ρ_i. Остальные ρ_j легко получаются из (6). После определения ρ_k фазы φ_l находятся при помощи квадратур.

п. 4. Резонансы третьего порядка. Они соответствуют одному из следующих соотношений между частотами: 1) $\beta_1 = 2\beta_2$, 2) $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$.

Резонанс $\beta_1 = 2\beta_2$. Для $n = 2$ это есть случай, разобранный в работе [1]. 3-модельная система определяется гамильтонианом

$$\Gamma = \beta_2 (2\rho_1 + \rho_2) + 2A\sqrt{\rho_1 \rho_2^2} \cos \psi \quad (\psi = \varphi_1 - 2\varphi_2). \tag{8}$$

---

* Отметим, что система (5) при наличии интегралов (6), (7) является интегрируемой (теорема Лиувилля).

Для ρ_2 с помощью интегралов вида (6), (7) для системы (8) получается уравнение

$$\dot{\rho}_2 = \pm 2\sqrt{2A^2\rho_2^2(J-\rho_2)-F^2} \quad (J = 2\rho_1 + \rho_2) \tag{9}$$

Качественное исследование такого уравнения в несколько иных переменных было проведено в ([1]). Изучение уравнений (9) на фазовой плоскости ρ, $\dot{\rho}$ (в зависимости от значения F) показывает, что: 1) вообще говоря, имеет место периодическая «перекачка энергии» * между осцилляторами; 2) существует стационарный режим, когда перекачки энергии нет (центр); 3) существует режим, когда один из осцилляторов асимптотически останавливается ($\rho_2 \to 0$) (сепаратриса).

Замечание 2. Подобная же картина перекачки энергии между резонирующими осцилляторами будет и в том случае, когда они входят в систему n связанных осцилляторов, если нет других резонансных соотношений.

Резонанс $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$. В этом случае интегралы 3-модельной системы

$$\Gamma = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \rho_\nu + 2A\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3}\cos\psi, \quad \psi = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_3$$

вида (6), (7) позволяют выписать уравнение для ρ_1

$$\dot{\rho}_1 = \pm\sqrt{4A^2\rho_1(J_2+\rho_1)(J_3-\rho_1)-F^2}. \tag{10}$$

Исследование уравнения (10) показывает, что в рассматриваемом случае имеется особый режим, когда два осциллятора асимптотически останавливаются.

п. 5. Резонансы четвертого порядка. Остановимся на резонансе четвертого порядка, определяемого соотношением $\beta_1 = 3\beta_2$. В случае 2 степеней свободы (см. замечание 2) 4-модельная система с гамильтонианом

$$\Gamma = \beta_2(3\rho_1 + \rho_2) + 2A\sqrt{\rho_1\rho_2^3}\cos\psi + A_l\rho^{|l|} \quad (l = 2)$$

имеет интегралы $J = 3\rho_1 + \rho_2$, $F = \Gamma - \beta_2 J$. Исследование уравнения для ρ_1 показывает, что в этом случае полная перекачка энергии (по крайней мере одно из $\rho_i \to 0$) возможна лишь при очень жестких ограничениях на коэффициенты системы A_l.

Замечание 3. Резонансы высших порядков в гамильтоновых системах с одним резонансным соотношением исследуются аналогичным образом.

Замечание 4. Различие в величине частот, участвующих в резонансе, сказывается на характере особых точек уравнения для ρ_i.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
24 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Горелик, А. Витт, ЖТФ, 3, в. 2—3, 294 (1933). [2] Дж. Д. Бирхгоф, Динамические системы, М.— Л., 1941. [3] J. Moser, Mem. Am. Math. Soc., 81 (1968). [4] К. Л. Зигель, Лекции по небесной механике, М., 1959. [5] А. Д. Брюно, ДАН, 174, № 5, 1003 (1967). [6] Ф. Л. Черноусько, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 3, № 1, 131 (1963). [7] А. П. Маркеев, Космические исследования, 5, в. 3, 365 (1967). [8] А. П. Торжевский, Космические исследования, 6, в. 1, 58 (1968). [9] Р. Ф. Ганиев, В. О. Кононенко, Мех. тверд. тела, № 3, 3 (1968). [10] R. Pringle jr., AIAA J., 6, № 7, 1217 (1968).

* Периодическое изменение ρ_i (см. замечание 1).