Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Ю. В. КРАВЧЕНКО, П. В. БЫЧКОВ

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Математический анализ и теория вероятностей

Практическое пособие
для студентов факультета
психологии и педагогики

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2019

УДК 517:519.2(076)
ББК 22.161я73+22.171я73
К772

Рецензенты:
доктор физико-математических наук В. М. Селькин;
доктор физико-математических наук В. Н. Тютянов

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Кравченко, Ю. В.
К772 Основы высшей математики. Математический анализ и теория вероятностей : практическое пособие / Ю. В. Кравченко, П. В. Бычков ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2019. – 47 с.
ISBN 978-985-577-543-1

В основу практического пособия положен основной программный материал по математическому анализу и теории вероятностей курса высшей математики. Оно содержит оригинальные схемы и таблицы, адаптированные определения теоретических понятий, упражнения и разноуровневые задания.

Адресовано студентам факультета психологии и педагогики, а также преподавателям, читающим курс высшей математики для гуманитарных специальностей.

УДК 517:519.2(076)
ББК 22.161я73+22.171я73

ISBN 978-985-577-543-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время математика всё шире проникает в повседневную жизнь, всё более внедряется в традиционно далёкие от неё области. Компьютеризация общества, внедрение современных информационных технологий требуют математической грамотности человека на каждом рабочем месте. Это предполагает и конкретные математические знания, и определённый стиль мышления, вырабатываемый математикой. Всё больше специальностей, в том числе и психология, требующих высокого уровня образования, связано с непосредственным применением математики, поэтому дисциплина «Основы высшей математики» для психологов становится профессионально значимым предметом.

Целью дисциплины является овладение студентами основами высшей математики.

Задачами дисциплины являются:

– ознакомление студентов с основами теории множеств и теории вероятностей, с методами дифференциального исчисления и дискретной математики, с основами математического моделирования и финансовых расчётов;

– анализ основных положений изучаемых разделов математики;

– усвоение студентами основных понятий, формул и теорем курса;

– формирование умений и навыков использования математического языка и аппарата при описании социально-гуманитарных явлений и решении прикладных задач.

Дисциплина обязательного компонента «Основы высшей математики» предшествует изучению учебного курса «Статистические методы в психологии», который посвящён вопросам математической статистики, включая современные её разделы, используемые психологической наукой.

Практическое пособие включает в себя необходимый теоретический материал, а также базовые, ключевые понятия.

1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная функция. Неопределённый интеграл и его свойства

Определение 1.1.1. Функция $\mathrm{F}(x)$, определённая в промежутке (a, b), называется *первообразной* данной функции $f(x)$ в этом промежутке, если для любого значения $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$\mathrm{F}'(x) = f(x). \tag{1.1.1}$$

Например, функция $\mathrm{F}(x) = x^4$ – первообразная функции $f(x) = 4x^3$ в интервале $(-\infty, +\infty)$, поскольку $(x^4)' = 4x^3$ для всех x.

Если $\mathrm{F}(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\Phi(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}, \tag{1.1.2}$$

где C – произвольная постоянная, также является её первообразной, поскольку $\Phi'(x) = (\mathrm{F}(x) + \mathrm{C})' = \mathrm{F}'(x) + 0 = f(x)$. Обратно, если $\mathrm{F}(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные функции $f(x)$, то они отличаются произвольным постоянным слагаемым, то есть

$$\Phi(x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{C},\ \Phi(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}.$$

Таким образом, выражение (1.1.2), в котором функция $\mathrm{F}(x)$ удовлетворяет условию (1.1.1), определяет множество всех первообразных данной функции $f(x)$ в заданном промежутке (a, b).

Определение 1.1.2. *Неопределённым интегралом* от данной функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C},$$

где $\mathrm{F}'(x) = f(x)$. Знак $\int$ называется знаком неопределённого интеграла; функция $f(x)$ – подынтегральной функцией; выражение $f(x)\mathrm{d}x$ – подынтегральным выражением.

Операция нахождения первообразной данной функции называется интегрированием.

Неопределённый интеграл обладает следующими основными свойствами.

Свойство 1.1.1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x);\quad d\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

<u>Свойство 1.1.2.</u> Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + \mathrm{C}. \tag{1.1.3}$$

<u>Свойство 1.1.3.</u> Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \ (k = \mathrm{const},\ k \neq 0). \tag{1.1.4}$$

<u>Свойство 1.1.4.</u> Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ также имеет первообразную, причём

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x. \tag{1.1.5}$$

Первое свойство следует из определения неопределённого интеграла. Третье и четвёртое свойства доказываются сравнением производных от обеих частей равенств (1.1.4) и (1.1.5), при этом учитывается, что неопределённый интеграл определён с точностью до постоянного слагаемого.

Чтобы доказать второе свойство, обозначим $\int \mathrm{d}f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x)$. На основании первого свойства получаем $f'(x) = \mathrm{F}'(x)$, откуда $\mathrm{F}(x) = f(x) + \mathrm{C}$, то есть $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + \mathrm{C}$.

1.2. Таблица основных неопределённых интегралов

Таблицу простейших неопределённых интегралов нетрудно получить, воспользовавшись тем, что интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Будем исходить из формулы (1.1.3), которую запишем следующим образом: если $\mathrm{dF}(x) = f(x)\mathrm{d}x$, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}.$$

1. $\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}\ (n \neq -1).$

2. $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0).$

4. $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C.$

5. $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$

6. $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C.$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \mathrm{tg} x + C.$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\mathrm{ctg} + C.$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C.$

1.3. Понятие об основных методах интегрирования

К наиболее важным методам интегрирования относятся методы непосредственного интегрирования, замены переменной, интегрирования по частям.

Метод непосредственного интегрирования основан на свойстве 1.1.4 неопределённого интеграла. Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ имеют первообразные в некотором промежутке, то функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ также имеет первообразную в том же промежутке, причём

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int f_n(x)\mathrm{d}x,$$

то есть неопределённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме неопределённых интегралов от слагаемых.

Метод замены переменной (или *метод подстановки*) основан на следующей теореме.

Теорема 1.3.1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция, то функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ также имеет первообразную, причём

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + \mathrm{C}.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(t)))'_t = F'_\varphi \cdot \varphi'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

то есть функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F(\varphi(t))$.

Следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + C.$$

Теорема доказана.

Поскольку $F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)\mathrm{d}x$, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

По этой формуле осуществляется замена переменной в неопределённом интеграле.

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Поскольку $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ или $u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u$, то

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Как связать между собой все первообразные одной и той же функции? Докажите это.
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла. Докажите их.
5. Приведите таблицу основных неопределенных интегралов.
6. Назовите наиболее важные методы интегрирования.
7. На каком правиле основан метод непосредственного интегрирования?

8. На каком утверждении основан метод замены переменной? Докажите его.

9. Запишите формулу интегрирования по частям.

Практическое занятие 1

Задания для аудиторной работы

Найти следующие неопределённые интегралы:

1) $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{2}{x^2+7}-\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\right)\mathrm{d}x$; 2) $\int\left(2^x+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\mathrm{d}x$;

3) $\int\left(10^{-x}+\frac{x^2+2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$; 4) $\int\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; 5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2x-5}$; 6) $\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$;

7) $\int\frac{(3x^2-2)\mathrm{d}x}{x^3-2x+1}$; 8) $\int\mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x$; 9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-1}$; 10) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$;

11) $\int\cos^3x\sin x\,\mathrm{d}x$; 12) $\int\sin^4x\,\mathrm{d}x$; 13) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$;

14) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$; 15) $\int\frac{3x^2-5x+1}{x^3+x^2-x+2}\mathrm{d}x$;

16) $\int\frac{x^2+3x-1}{x^3+4x^2+4x}\mathrm{d}x$.

Задания для самостоятельной работы

Найти следующие неопределённые интегралы:

1) $\int\left(x+\frac{1}{x}+2^x-3\sin x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$; 2) $\int(1-2x)^{30}\mathrm{d}x$;

3) $\int\sqrt{\mathrm{tg}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; 4) $\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$; 5) $\int\frac{3x+2}{2x^2+6x-5}\mathrm{d}x$;

6) $\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{3+12x-3x^2}}$; 7) $\int \frac{x^4+x^3+1}{x^4+x^3-x-1}\mathrm{d}x$.

Практическое занятие 2

Задания для аудиторной работы

Найти следующие неопределённые интегралы:

1) $\int x\cos x\mathrm{d}x$; 2) $\int x\ln x\mathrm{d}x$; 3) $\int x^2\ln^2 x\mathrm{d}x$; 4) $\int \arccos x\mathrm{d}x$;

5) $\int xe^{2x}\mathrm{d}x$; 6) $\int e^x\sin x\mathrm{d}x$; 7) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; 8) $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; 9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1}$.

Задания для самостоятельной работы

Найти следующие неопределённые интегралы:

1) $\int x\sin x\mathrm{d}x$; 2) $\int x\ln^2 x\mathrm{d}x$; 3) $\int x^2e^{3x}\mathrm{d}x$; 4) $\int e^{3x}\cos 2x\mathrm{d}x$;

5) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$; 6) $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Понятие определённого интеграла

Пусть дана функция $y = f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ разобьём на n элементарных отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_{k-1}, x_k]$, … , $[x_{n-1}, b]$, длины которых обозначим через Δx_k, то есть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $x_0 = a$, $x_n = b$). В каждом из элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольно одну точку ξ_k, значение функции в этой точке $f(\xi_k)$ умножим на длину отрезка Δx_k, получим произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ (рисунок 2.1.1).

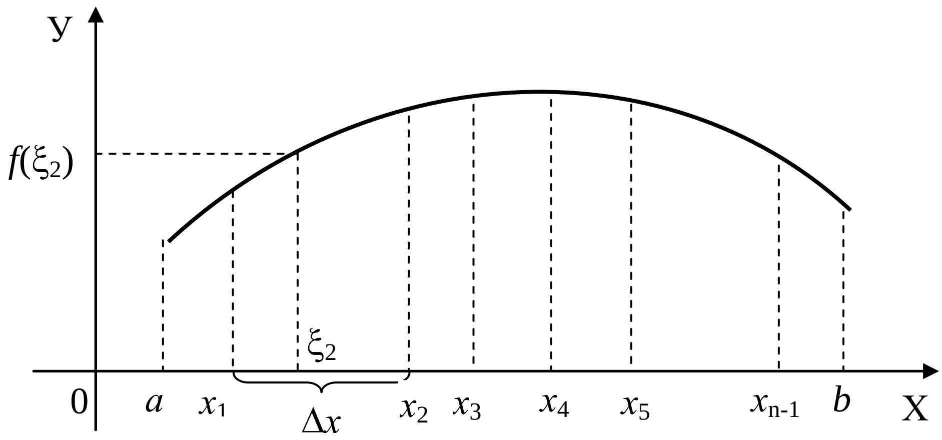

Рисунок 2.1.1

Составим сумму всех таких произведений

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего из элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ при данном n, то есть $\lambda = \max \Delta x_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Определение 2.1.1. *Определённым интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется конечный предел её интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю.

Определённый интеграл обозначается символом $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (читается: определённый интеграл от a до b; $f(x)$ называется *подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования*; *a – нижним пределом интегрирования, b – верхним пределом интегрирования*.

Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Функция, для которой существует такой предел, называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

2.2. Геометрический смысл определённого интеграла

Определённый интеграл от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$, $x = b$, отрезком оси Оx – снизу (рисунок 2.2.1) или сверху (рисунок 2.2.2).

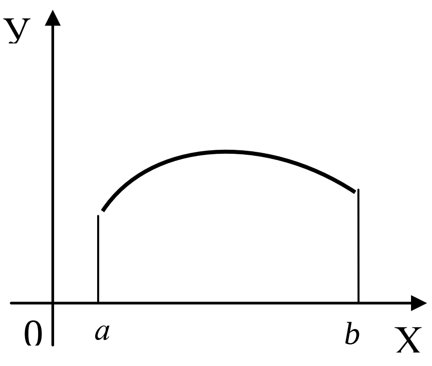

Рисунок 2.2.1

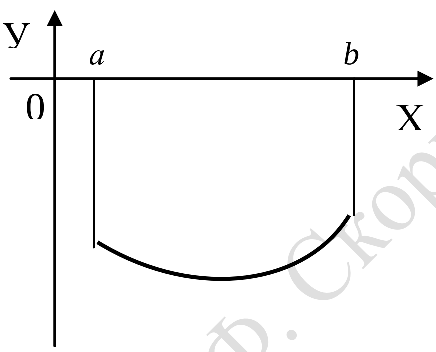

Рисунок 2.2.2

2.3. Основные свойства определённого интеграла

При введении понятия определённого интеграла предполагалось, что $a < b$. Рассмотрим случай, когда $a = b$ и $a > b$. Полагаем по определению

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad (2.3.1)$$

где $f(x)$ – любая функция;

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,$$

где $f(x)$ – функция, интегрируемая на отрезке $[b, a]$ $(b < a)$.

Определённый интеграл обладает следующими свойствами.

<u>Свойство 2.3.1.</u> Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то она интегрируема на двух других отрезках, причём

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

при любом расположении точек a, b, c.

Свойство 2.3.2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $kf(x)$, где k = const, также интегрируема на этом отрезке, причём

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Свойство 2.3.3. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, интегрируемые на отрезке $[a, b]$, то их сумма и разность также интегрируемы на этом отрезке, причём

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Свойство 2.3.4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

Свойство 2.3.5. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, интегрируемые на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, и $f(x) \leq \varphi(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Свойство 2.3.6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

2.4. Формула Ньютона – Лейбница

Связь между определённым и неопределённым интегралом выражает следующая теорема.

Теорема 2.4.1. Определённый интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой её первообразной для верхнего и нижнего предела интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

где $x \in [a, b]$, в котором $f(x)$ непрерывна. Заметим, что $\Phi'(x) = f(x)$.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$. Итак, функции $\Phi(x)$ и $\mathrm{F}(x)$ имеют одинаковые производные; на основании свойств первообразных, заключаем, что

$$\Phi(x) = F(x) + \mathrm{C}.$$

Поскольку $\Phi(a) = 0$ (смотри 2.3.1), при $x = a$ из последнего равенства получаем $0 = F(a) + \mathrm{C}$, откуда $\mathrm{C} = -F(a)$.

Следовательно,

$$\Phi(x) = F(x) - F(a), \quad \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$.

В частности, при $x = b$ получаем

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Теорема доказана.

Эта формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

Вопросы для самоконтроля

1. Как строится интегральная сумма для функции?
2. Что называется определенным интегралом?
3. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
5. Выведите формулу Ньютона – Лейбница.

Практическое занятие 1

Задания для аудиторной работы

Вычислить следующие интегралы:

1) $\int_1^2 \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x-1}\ \mathrm{d}x$; 2) $\int_0^{\pi} x^2 + \sin x\ \mathrm{d}x$; 3) ; $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-9}$;

4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$; 5) $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; 6) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$;

7) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$; 8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(2x^2-6x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$; 9) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1}}$;

10) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}^{\pi}}\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$; 11) $\displaystyle\int_{0}^{1}x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int_{1}^{2} 2^x+2x+1\,\mathrm{d}x$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+x}$; 3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$; 4) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x}}$;

5) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$; 6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$; 7) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Практическое занятие 2

Задания для аудиторной работы

Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; 3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$;

4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$; 5) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{3x^3+4}{x^4-x^3-x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие интегралы:

1) $\int\limits_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2}\ \mathrm{d}x$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ \mathrm{d}x$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^3 \frac{x}{3}\ \mathrm{d}x$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\ \mathrm{d}x$;

5) $\int\limits_0^2 \frac{3x^2-9x+7}{2x^3+x^2-2x-1}\mathrm{d}x$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При введении понятия определённого интеграла предполагалось, что выполняются условия: 1) пределы интегрирования a и b являются конечными; 2) подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. В этом случае определённый интеграл называют *собственным*. Если хотя бы одно из двух указанных условий не выполняется, то интеграл называют *несобственным*.

3.1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при любом $x \geq a$. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$I(b) = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \qquad (3.1.1)$$

Как было показано ранее, интеграл (3.1.1) является дифференцируемой функцией верхнего предела. Предположим, что при $b \to \infty$ функция (3.1.1) имеет конечный предел; этот предел называется *сходящимся несобственным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Если этот предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Геометрически несобственный интеграл от неотрицательной функции выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева – отрезком прямой $x = a$, снизу – осью Оx (рисунок 3.1.1) (в случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, в случае расходящегося – бесконечной).

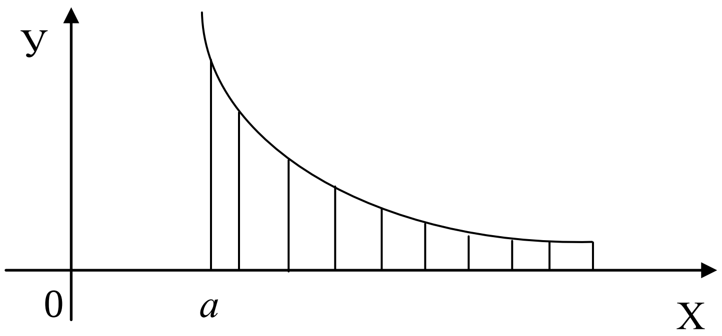

Рисунок 3.1.1

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

где c – любая точка из интервала (-∞; +∞).

Приведём без доказательства две теоремы. С их помощью можно исследовать вопрос о сходимости некоторых несобственных интегралов.

Теорема 3.1.1. Если при $x \ge a$ выполнены неравенства $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и $\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сходится, то сходится и $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$, причём $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$; если $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ расходится, то расходится и $\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Геометрическое значение этой теоремы иллюстрируется на рисунке 3.1.2.

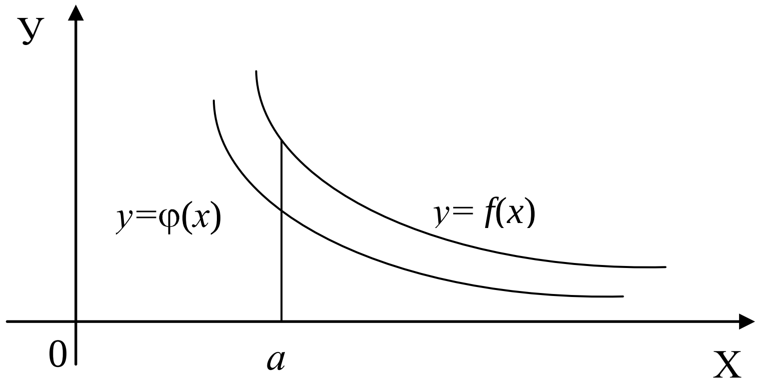

Рисунок 3.1.2

Теорема 3.1.2. Если в промежутке $[a, +\infty[$ функция $y = f(x)$ меняет знак и $\int_a^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ сходится, то сходится также $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

3.2. Интегралы от неограниченных функций

Если функция $y = f(x)$ не ограничена в окрестности точки c отрезка $[a, b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то несобственный интеграл от этой функции определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)dx, \qquad (3.2.1)$$

где $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. В случае $c = b$ или $c = a$ получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx; \qquad (3.2.2)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^b f(x)dx \qquad (3.2.3)$$

Несобственный интеграл (3.2.2) или (3.2.3) называется сходящимся, если существует конечный предел соответствующего определённого интеграла; в противном случае интеграл называется расходящимся.

Несобственный интеграл (3.2.1) называется сходящимся, если существуют и конечны оба предела в правой части.

Для интегралов от неограниченных функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3.1.1 и 3.1.2. Они применяются для исследования вопроса о сходимости несобственных интегралов и оценки их значений. В качестве функции, с которой сравнивают подынтегральную функцию, часто выбирают $\varphi(x) = \dfrac{1}{(x-a)^{\alpha}}$. Легко видеть, что

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$.

<u>Пример 3.2.1.</u> Исследовать, сходится ли интеграл $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 3x^2}$.

Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x = 0$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 3x^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ и } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} < \int_0^2 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$$

сходится, то сходится и данный интеграл.

Вопросы для самоконтроля

1. Определите понятие собственного и несобственного интегралов.
2. Определите понятие интегралов с бесконечными пределами интегрирования.
3. В чем заключается геометрический смысл интегралов с бесконечными пределами интегрирования? Поясните это на рисунке.
4. Сформулируйте две теоремы, с помощью которых можно исследовать вопрос о сходимости некоторых несобственных интегралов.
5. Как определяются интегралы от неограниченных функций?
6. С какой функцией удобно сравнивать подынтегральную функцию при исследовании вопроса о сходимости интеграла? Почему?

Практическое занятие 1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Задания для аудиторной работы

Вычислить следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$; 3) $\int\limits_{0}^{\infty}x\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$ $(a>0)$; 4) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$;

5) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x)^3}$; 6) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$; 7) $\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^3}$; 2) $\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; 3) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x$; 4) $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Практическое занятие 2. Интегралы от неограниченных функций

Задания для аудиторной работы

Вычислить следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{2}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int\limits_{0}^{1}x\ln x\mathrm{d}x$; 3) $\int\limits_{1}^{2}\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$; 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$; 7) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\limits_0^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

4.1. Математическая модель демографического процесса

Рассмотрим демографический процесс, математические характеристики которого приводят к дифференциальным уравнениям.

Из статистических данных известно, что число новорожденных за единицу времени (например, за один год) пропорционально числу населения в данном регионе с коэффициентом пропорциональности k_1, а число умерших также пропорционально численности населения с коэффициентом пропорциональности k_2. Требуется установить закон, по которому определяется численность населения данного региона в зависимости от времени t.

Обозначим через y число жителей региона. Очевидно, что величина y является функцией времени t, то есть $y = y(t)$. Тогда по условию задачи число родившихся за единицу времени равно k_1y, а умерших за единицу времени равно k_2y. Прирост населения за единицу времени будет $k_1y - k_2y = (k_1 - k_2)y$. Разность $k = k_1 - k_2$ называется коэффициентом естественного прироста.

Используя дифференциальное исчисление, то есть $\mathrm{d}y \sim \Delta y$, получаем, что за малый промежуток времени $\mathrm{d}t$ прирост населения постоянный: $\mathrm{d}y = ky\mathrm{d}t$ или $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$.

Таким образом, получена математическая модель демографического процесса.

4.2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (4.2.1)$$

или

$$y' = f(x, y), \qquad (4.2.2)$$

где x – независимая переменная,

y – неизвестная функция и

y' – её производная.

Определение 4.2.1. *Решением дифференциального уравнения* (4.2.1) или (4.2.2) называется функция $y = \varphi(x)$ такая, что

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \text{ или } \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Определение 4.2.2. *Общим решением дифференциального уравнения* первого порядка называется такое его решение, зависящее от одной произвольной постоянной C, из которого получается любое частное решение, соответствующее допустимому начальному условию задачи Коши.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка состоит в следующем: необходимо найти решение $y = y(x)$ уравнения (4.2.1) или (4.2.2), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, называемому начальным условием.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$y = \varphi(x, C) \text{ или } \Phi(x, y, C) = 0.$$

Заметим, что решение дифференциального уравнения (4.2.2) существует не при любой функции $f(x, y)$ и не при любых начальных условиях.

Теорема 4.2.1 (Коши). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $f_y'(x, y)$ непрерывны в некоторой замкнутой области D и точка $(x_0, y_0) \in D$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию при $x = x_0$, $y = y_0$.

Определение 4.2.1. Решения, полученные из общего решения дифференциального уравнения путём задания произвольной постоянной определённого численного значения, называются *частными*.

На практике частное решение получается из общего не прямым заданием значений произвольных постоянных, а исходя из тех условий, которым должно удовлетворять искомое частное решение. Задание таких условий называется *заданием начальных условий* и записывается коротко так: $f(x_0) = y_0$.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$, называется задачей Коши.

С геометрической точки зрения общее решение представляет семейство кривых, а частное решение – отдельные кривые этого семейства.

Среди дифференциальных уравнений встречаются такие, которые имеют решения, не получающиеся из общего решения ни при каких значениях С. Такие решения называются *особыми*. Например, уравнение $y' = \sqrt{1 - y^2}$ имеет общее решение $y = \sin(x + C)$. В то же время функция $y = 1$ также является решением этого уравнения, хотя это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях С, то есть является особым решением.

Вопросы для самоконтроля

1. Разъясните математическую модель демографического процесса, приводящую к дифференциальному уравнению.
2. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка, его решением?
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения первого порядка.
4. В чем состоит суть задачи Коши?
5. При каких условиях существует решение дифференциального уравнения первого порядка?
6. Что называется частным решением?
7. Дайте геометрическую интерпретацию общего и частного решения.
8. Какое решение называется особым? Приведите пример.

5. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

<u>Определение 5.1.1.</u> Уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)\mathrm{d}x + f_2(x)\varphi_2(y)\mathrm{d}y = 0$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Оно может быть приведено к уравнению с разделёнными переменными путём деления обеих его частей на выражение $f_2(x)\varphi_1(y)$:

$$\frac{f_1(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(y)\, f_2(x)}\mathrm{d}\, x + \frac{f_2(x)\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)\, f_2(x)}\mathrm{d}\, y = 0,$$

откуда

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}\, x + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\mathrm{d}\, y = 0 \qquad (5.1.1)$$

Равенство (5.1.1) можно считать суммой двух дифференциалов. Интегрируя его, получим

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}\, x + \int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\mathrm{d}\, y = \mathrm{C}, \qquad (5.1.2)$$

где C – постоянная интегрирования.
Выражение (5.1.2) является общим решением уравнения (5.1.1).

5.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 5.2.1. Уравнение $\dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = f(x, y)$ называется *однородным уравнением* первого порядка, если функция $f(x, y)$ может быть пред-ставлена как функция отношения своих аргументов: $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (5.2.1)$$

Например, уравнение $\dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ есть однородное, так как, деля числитель и знаменатель на x^2, получим

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Однородное дифференциальное уравнение (5.2.1) приводится к виду уравнения с разделяющимися переменными подстановкой $\dfrac{y}{x} = u$, где u – новая неизвестная функция.

Произведя замену $y = xu$, мы придём к уравнению с разделяющимися переменными. Продифференцируем $y = xu$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

и уравнение (5.2.1) примет вид

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u) \text{ или } x\mathrm{d}u = (\varphi(u) - u)\mathrm{d}x.$$

Разделим в последнем уравнении переменные:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Выполняя интегрирование, найдём

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

или

$$\ln|x| = \int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} + C.$$

Взяв интеграл в правой части последнего равенства и выполнив обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, получим общее решение однородного уравнения (5.2.1).

5.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

<u>Определение 5.3.1.</u> *Линейным дифференциальным уравнением* первого порядка называют уравнение, содержащее y и y' в первой степени и не содержащее их произведений. Линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' + p(x)\cdot y = g(x), \tag{5.3.1}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – известные функции от x или постоянные величины. Уравнение (5.3.1) решается подстановкой

$$y = uv,$$

где u и v – неизвестные функции от x, одну из которых можно выбрать произвольно так, как это удобно для решения.

Дифференцируя $y = uv$ по x, получим

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Значения y и $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ подставим в уравнение (5.3.1):

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + p(x)\cdot uv = g(x).$$

Сгруппируем первый и третий члены:

$$v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + p(x)v\right) = g(x).$$

Выберем одну из функций v так, чтобы коэффициент при u обратился в нуль, то есть

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + p(x)\cdot v = 0. \tag{5.3.2}$$

При этом условии

$$v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(x). \tag{5.3.3}$$

Найдем v из уравнения (5.3.2):

$$\mathrm{d}v + p(x)\cdot v\mathrm{d}x = 0;\ \frac{\mathrm{d}v}{v} + p(x)\cdot \mathrm{d}x = 0;\ \int\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\ln v = -\int p(x)\,\mathrm{d}x;\ v = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Значение v подставим в уравнение (5.3.2) и найдем u:

$$v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(x);\ e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(x);\ \frac{\mathrm{d}u}{e^{\int p(x)\mathrm{d}x}} = g(x)\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}u = g(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$u = \int g(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}.$$

Общее решение уравнения (5.3.1) будет иметь вид

$$y = u\cdot v = \left(\int g(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}\right)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными? Как найти его решения?
2. Дайте определение однородного дифференциального уравнения.
3. К какому виду и каким методом приводится однородное дифференциальное уравнение?
4. Найдите общее решение однородного дифференциального уравнения, записанного в общем виде.
5. Дайте определение линейного дифференциального уравнения.
6. Каким методом решается и к чему сводится решение линейного дифференциального уравнения?
7. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения, записанного в общем виде.

Практическое занятие 1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения

Задания для аудиторной работы

1. Решить следующие дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

1) $(xy^2 + x)\mathrm{d}x + (y - x^2y)\mathrm{d}y = 0$; 2) $\dfrac{y}{x}(1 + x^2)y' = 1 + y^2$; 3) $e^y\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1\right) = 1$.

2. Решить следующие однородные дифференциальные уравнения:

1) $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$; 2) $(x^2 + y^2)dy = xy\mathrm{d}x$;

3) $y - x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; 4) $(x^2 - xy + y^2)\mathrm{d}x = x^2\mathrm{d}y$;

5) $\sqrt{xy} - x\;\;\mathrm{d}y + ydx = 0$; 6) $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{tg}\dfrac{y}{x}\cdot\cos^2\dfrac{y}{x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить следующие дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

1) $\sqrt{xy} - \sqrt{y}\ \mathrm{d}y + \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 0$; 2) $(1 + 2y)x\mathrm{d}y + (1 + x^2)\mathrm{d}y = 0$;

3) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = y^2$;

2. Решить следующие однородные дифференциальные уравнения:

1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x)$; 2) $(y^2 - 2xy + x^2)y' = 0$; 3) $x\mathrm{d}y - \left(y + x \cdot \mathrm{tg}\frac{y}{x}\right) = 0$.

Практическое занятие 2. Линейные дифференциальные уравнения

Задания для аудиторной работы

Решить следующие линейные дифференциальные уравнения:

1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$; 2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$; 3) $y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0$;

4) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 3$; 5) $y' + 2xy = 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}$; 6) $y' - y \cdot \mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$;

7) $xy' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить следующие линейные дифференциальные уравнения:

1) $y' - y = \mathrm{e}^x$; 2) $y' + x^2y = x^2$; 3) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$;

4) $xy' + 2y = x^4$; 5) $(2x - y^2)y' = 2y$.

6. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

6.1. Дискретная математика

Дискретная математика — область математики, занимающаяся изучением дискретных структур, которые возникают как в пределах самой математики, так и в её приложениях.

К числу таких структур могут быть отнесены конечные группы, конечные графы, а также некоторые математические модели преобразователей информации, конечные автоматы, машины Тьюринга и так далее. Это примеры структур конечного (финитного) характера. Раздел дискретной математики, изучающий их, называется конечной математикой. Иногда само это понятие расширяют до дискретной математики. Помимо указанных конечных структур, дискретная математика изучает некоторые алгебраические системы, бесконечные графы, вычислительные схемы определённого вида, клеточные автоматы и т. д. В качестве синонима иногда употребляется термин «дискретный анализ».

Основными разделами дискретной математики в настоящее время являются:

1. Математическая логика.
2. Математическая кибернетика.
3. Теория функциональных систем.
4. Общая алгебра.
5. Комбинаторика (отдельные разделы).
6. Теория графов.
7. Машинная арифметика.
8. Теория алгоритмов.
9. Теория игр.
10. Теория кодирования.
11. Теория конечных автоматов.
12. Теория множеств.
13. Теория формальных грамматик.
14. Вычислительная геометрия.
15. Теория булевых функций.
16. Логическое программирование.
17. Функциональное программирование.
18. λ-исчисление.
19. Булева алгебра.

20. Комбинаторная логика.
21. Математическая лингвистика.
22. Теория искусственного интеллекта.
23. Прямоугольная система линейных алгебраических уравнений.

6.2. Элементы комбинаторики

Решение таких задач, как нахождение числа подмножеств некоторого множества, числа последовательностей исходов эксперимента и многих других связано с подсчетом всевозможных комбинаций элементов. Раздел математики, в котором изучаются общие правила и приемы решения такого рода, задач называют комбинаторикой. В основе решения комбинаторных задач (а начинаются эти задачи почти всегда с вопроса «сколькими способами?») положено два основных правила.

Правило сложения: «Если интересующие нас комбинации элементов можно разбить на такие группы, что каждая комбинация элементов войдет в одну и только одну из групп, то общее число всевозможных комбинаций равно сумме чисел комбинаций в каждой из групп».

Правило умножения: «Если интересующие нас комбинации можно составить выполняя одно за другим k действий, причем первое действие выполняется n_1 способами, после чего второе n_2 способами и так далее, то все k действий могут быть выполнены $n_1 n_2 .. n_k$. способами».

Перестановки. Перестановкой из n элементов $\mathrm{P_n}$ называется число способов, при помощи которых можно расположить n различных элементов на n различных местах. Можно показать, что

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n. \qquad (6.2.1)$$

Для обозначения произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1) \cdot n$ используется специальный символ $n!$. Итак,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \qquad (6.2.2)$$

Подсчитаем для примера сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг. Задача сводится к нахождению числа перестановок из 5 элементов. Число таких перестановок равно произведению $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, следовательно существует 120 способов расстановки 5 различных книг на полке.

Размещения. Размещением из *n* по *m* (обозначается A_n^m) называется число способов, при помощи которых можно расположить *m* различных элементов на *m* различных местах, выбранных из данного числа *n*. Формула для числа размещений:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (6.2.3)$$

Допустим, что студенту необходимо сдать экзамены по трем различным дисциплинам в течение семи дней. Сколькими способами ему можно составить расписание экзаменов, если сдача трех или двух экзаменов в один день не допускается?

Задача сводится к расположению трех различных элементов (дисциплин, по которым сдаются экзамены) на трех местах (днях), взятых из данных семи мест (дней). Поэтому число таких способов равно числу размещений $A_7 = 7\cdot6\cdot5 = 210$.

Сочетания. Сочетанием из *n* элементов по *m* (обозначается C_n^m) называется число способов, при помощи которых можно выбрать *m* элементов, взятых из данных *n* элементов. Задачи размещения, сочетания и перестановки связаны простой зависимостью: выбрав *m* элементов из *n* и затем расположив их на *m* различных местах, очевидно, получим размещение из *n* по *m*:

$$C_n^m P_m = A_n^m, \qquad (6.2.4)$$

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \qquad (6.2.5)$$

Из последней формулы видно, что $C_n^m = C_n^{n-m}$, что довольно естественно, ибо, выбрав какие-то *m* элементов из данных *n* элементов, мы тем самым выбрали и оставшиеся $(n-m)$ элементов.

Подсчитаем, сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти человек. Задача сводится к нахождению числа сочетаний C_8^5 по формуле (6.2.5):

$$C_8^5 = C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56.$$

Искомое число способов равно 56.

Размещения с повторениями. Размещением с повторениями из *n* по *m* (обозначается A_n^m) называется число способов, при помощи которых можно расположить *n* различных элементов на *m* различных местах, причем любой из этих *n* элементов может повторяться сколько угодно раз. Легко показать, основываясь на правиле умножения, что

$$A_n^m = n^m. \tag{6.2.6}$$

В качестве примера подсчитаем, сколько существует различных пятизначных телефонных номеров, не содержащих цифры 0. На пяти местах может быть расположена любая из девяти цифр 1, 2, ..., 9, причем цифры могут повторяться. Задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями $A_9^5 = 9^5 = 59049$. Искомое число способов равно 59049.

6.3. Задача о количестве подмножеств конечного множества

Как еще одну иллюстрацию применения правил сложения и умножения рассмотрим решение такой задачи: сколько различных подмножеств, включая пустое множество и само множество, имеет множество А, состоящее из n элементов $a_1, ..., a_n$? Так как любое подмножество состоит либо из 0, либо из 1, либо из 2... либо из n элементов, и число подмножеств, состоящих из k элементов, равно A_n^k, общее число всевозможных подмножеств выражается суммой $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$ (смотри правило сложения). С другой стороны, каждое подмножество полностью определено, если указано, какие из элементов $a_1, ..., a_n$ ему принадлежат, а какие нет. Для каждого из n элементов есть две возможности: либо он входит в данное подмножество, либо нет. Общее число таких возможностей по правилу умножения равно 2″. В результате получили важное тождество:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{6.2.7}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дискретной математики.
2. Назовите основные разделы дискретной математики
3. Какое правило сложения в комбинаторике существует?
4. Какое правило умножения в комбинаторике существует?
5. Что такое перестановки?
6. Что такое размещения?

7. Что такое сочетания?

8. Что такое размещения с повторениями?

9. Как решается задача о количестве подмножеств конечного множества?

Практическое занятие

Задания для аудиторной работы

1. При окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек перешло из рук в руки, если во встрече участвовали 6 специалистов?

2. В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?

3. Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?

4. Пятеро друзей сыграли между собой по одной партии в шахматы. Сколько всего партий было сыграно?

5. В меню столовой предложено на выбор 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить?

Задания для самостоятельной работы

1. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?

2. На прививку в медпункт отправились 7 друзей. Сколькими разными способами они могут встать в очередь у медицинского кабинета?

3. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).

4. Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из трёх видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить?

5. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими способами можно выбрать покупку из двух разных блокнотов и одной ручки?

7. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

7.1. Пространство элементарных событий

Часто в различных жизненных ситуациях, зная, в принципе, возможные результаты какого-либо события, не можем предсказать точный исход: пойдет ли завтра дождь, какой номер выиграет в лотерее, когда перегорит только что купленный сканер и т. п. Однако можно сравнивать различные подходы по тому, насколько правдоподобно их осуществление, вводя для сравнения некоторую количественную меру. Изучением этой меры и занимается теория вероятностей. В основе этой теории лежат специальные математические модели, в которых сопоставлению событий по степени их правдоподобия можно придать точный смысл.

Под *испытанием* понимается реализация определенной совокупности условий, в результате которой наступает только одно *элементарное событие* (*исход*). *Пространством элементарных событий* Ω называется множество элементарных событий ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые могут произойти в испытании:

$$\Omega = \{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n;\ldots\}.$$

В зависимости от числа элементарных событий в пространстве Ω различают конечное, счетное и несчетное пространство элементарных событий.

Событием (*составным событием*) называется некоторое подмножество элементарных событий из Ω. Событие называется *невозможным*, если оно не содержит ни одного элементарного события из пространства Ω. Невозможное событие никогда не происходит в данном испытании и обозначается $\varnothing$.

Событие называется *достоверным*, если оно содержит все элементарные события пространства Ω. Достоверное событие совпадает с пространством элементарных событий и обозначается Ω.

В одних испытаниях наступают одни события, в других – другие. Причем заранее невозможно предсказать, какое событие наступит. Такие события называются *случайными* и обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, … .

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω. Отношения между событиями можно рассматривать как отношения между соответствующими подмножествами множества Ω.

События A и B называются *равными* (*равносильными*), то есть $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементарных событий. Равные события наступают или не наступают одновременно.

Говорят, что событие A *влечет* за собой событие B, $A \subset B$, если каждое элементарное событие из A принадлежит событию B. Событие B всегда происходит, когда происходит событие A.

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее из элементарных событий пространства Ω, принадлежащих или событию A, или событию B, или A и B одновременно. Оно наступает тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B.

Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее из тех элементарных событий пространства исходов Ω, которые принадлежат и событию A, и событию B. Событие $A \cdot B$ состоит в одновременном наступлении событий A и B.

Разностью событий A и B называется событие $A \setminus B$, которое состоит из тех элементарных событий, которые принадлежат событию A и не принадлежат событию B. Событие $A \setminus B$ происходит тогда и только тогда, когда A наступает, а B не наступает.

Противоположным событием событию A называется событие $\overline{A}$, которое состоит из элементарных событий из Ω, не принадлежащих A. Событие $\overline{A}$ наступает тогда, когда событие A не наступает. Противоположное событие $\overline{A}$ единственно для события A. Поскольку одновременное наступление событий A и $\overline{A}$ невозможно, то $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ и $A + \overline{A} = \Omega$.

События A и B называются *несовместными*, если они не содержат общих элементарных событий, т. е. одновременно наступить не могут. Если события A и B несовместны, то $A \cdot B = \varnothing$.

Говорят, что события A_1, A_2, ..., A_n, $A_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, ..., n$, образуют *полную группу событий*, если выполняются следующие условия:

1) они попарно несовместны: $A_i \cdot A_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$;

2) хотя бы одно из событий A_1, A_2, ..., A_n обязательно наступит:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega.$$

События полной группы называются *гипотезами*. Противоположные события образуют полную группу событий.

7.2. Вероятность события

Вероятность события – это численная мера, которая определяет степень возможности появления события в одном испытании. Для подсчета вероятности существуют различные способы.

Классическое определение вероятности базируется на предположении о равновозможности всех элементарных событий конечного пространства Ω (например, при бросании монеты ни одна грань не имеет преимущества).

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, где ω_1, ω_2,..., ω_n – равновозможные исходы. И пусть событию A благоприятствуют исходы ω_{i_1}, ω_{i_2}, ..., ω_{i_k} то есть $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$.

Вероятность события A равна отношению числа k исходов, благоприятствующих событию A, к числу n всех возможных исходов испытания:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Из классического определения следуют свойства вероятности:

1-я вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$;

2-я вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$;

3-я вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей: $0 < P(A) < 1$;

4-я (аксиома сложения) если события A и B несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Статистическое определение вероятности используется в том случае, когда нельзя определить равновозможность исходов пространства Ω. Пусть проводится n повторных испытаний, в которых событие A наступает k раз. *Относительной частотой*_события A называется величина $w(A) = \frac{k}{n}$.

Если число опытов невелико, то относительная частота $w(A)$ при разном количестве испытаний будет различной, то есть она носит случайный характер. Однако при увеличении числа опытов относительная частота приближается к некоторой средней постоянной величине, то есть имеет место статистическая устойчивость относительной частоты $w(A)$. Постоянная величина, к которой приближается относительная частота $w(A)$ при увеличении числа опытов n, называется *статистической вероятностью* события A:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} w(A).$$

7.3. Условная вероятность и независимость событий

Пусть B – событие, имеющее ненулевую вероятность: $P(B)\neq 0$. *Условной вероятностью* события A называется вероятность этого события при условии, что событие B произошло. Обозначение: $P(A|B)$ или $P_B(A)$. Событие B называется *условием.*

Условная вероятность обладает следующими свойствами:

1) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}, P(B)>0$;

2) Если $B\subset A$, то $P(A|B)=1$;

3) Если A и B несовместны, то $P(A|B)=0$;

4) $P(\Omega|B)=1$;

5) $P(\varnothing|B)=0$;

6) $0<P(A|B)<1$.

Событие A называется *не зависимым* от события B ($P(B)\neq 0$), если появление события B не изменяет вероятность появления события A, то есть $P(A|B)=P(A)$.

Свойства независимых событий:

– если события A и B независимы, то $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$,

– событие A и достоверное событие Ω всегда независимы,

– если события A и B независимы, то независимы и события $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

7.4. Схема независимых испытаний Бернулли

Пусть проводится n испытаний, в каждом из которых возможно только два исхода: появление события A или появление события $\bar{A}$. Исход одного испытания не зависит от исходов других испытаний. Такие испытания называются *повторными независимыми*. Вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна $P(A)=p$, $P(\bar{A})=q=1-p$. Вероятность того, что в n повторных независимых испытаниях событие A появится ровно m раз, определяется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m)=C_n^m p^m\cdot(1-p)^{n-m},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ – биномиальные коэффициенты, $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется пространством элементарных исходов?
2. Какое событие называется невозможным, достоверным, случайным?
3. Какое событие называется суммой, произведением событий?
4. Какие события называются противоположными?
5. Что называется вероятностью события? В каких случаях используется классический, геометрический, статистический способ подсчета вероятности?
6. Какими свойствами обладает вероятность события?
7. Какое пространство называется вероятностным?
8. Какая вероятность называется условной? Какими свойствами она обладает?
9. Какие события называются независимыми?
10. Когда применяются формулы полной вероятности и Байеса?
11. В каких случаях для подсчета вероятности события используется формула Бернулли? Что означают n, p, q?
12. В каких случаях используются асимптотические формулы в схеме независимых испытаний Бернулли?

Практическое занятие

Задания для аудиторной работы

1. В пяти корзинах А, Б, Г и Д лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин А и Б находятся яблоки 3-го и 4-го сорта, в корзине В – 2-го и 3-го, в корзине Г – 4-го и 5-го, в корзине Д -1-го и 5-го. Занумеруйте корзины так, чтобы в корзине №1 имелись яблоки 1-го сорта (по меньшей мере одно), в корзине № 2 – яблоки 2-го сорта и так далее.

2. Можно ли провести футбольный турнир восьми команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи? Сколько всего было встреч на турнире?

3. Приведите к виду логической формулы высказывание: «Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда, когда нет ветра».

4. Кто из учеников A, B, C и D ходит в походы, а кто не ходит, если известно следующее:

а) если A или B ходит, то C не ходит;

б) если B не ходит, то ходит C и D;

в) C – ходит?

Задания для самостоятельной работы

1. В отделе архива обнаружено 7 книг, не подлежащих восстановлению. Найти вероятность появления несохранившихся книг, если всего в этом отделе 1 000 книг.

2. Перед экзаменом студент выучил 15 билетов из 43. Найти вероятность, что он вытянет «счастливый» билет, «несчастливый» билет? Сравнить вероятности и сделать выводы по поводу удачи этого студента на экзамене.

3. На полке 23 учебника по разным предметам, в том числе 2 по «Истории отечества», 3 по «Истории Древнего Рима» и 5 по «Археологии». Переплеты учебников одинаковые. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный в сумерках учебник окажется либо по «Истории отечества», либо по «Истории Древнего Рима», либо по «Археологии».

4. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены, сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

8. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

8.1. Случайные величины и их законы распределения

Пусть Ω – пространство элементарных событий данного испытания. *Случайной величиной* ξ называется действительная функция, которая каждому элементарному событию ω пространства элементарных событий Ω ставит в соответствие действительное число $\xi(\omega)$:

$$\xi:\Omega\to\mathbb{R} \text{ или } \xi=\xi(\omega),\ \omega\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Множество значений $\{\xi(\omega)\in\mathbb{R} \mid \omega\in\Omega\}$ называется *множеством возможных значений случайной величины* ξ и зависит от пространства Ω: может быть конечным, счетным или несчетным.

Законом распределения случайной величины называется любое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция переменной $x\in\mathbb{R}$, равная вероятности того, что случайная величина ξ примет значение меньшее x:

$$F_{\xi}(x)=P(\xi<x) \text{ для любого } x\in(-\infty;+\infty).$$

Если рассматривать случайную величину ξ как случайную точку оси Ox, то функция распределения $F_{\xi}(x)$ с геометрической точки зрения есть вероятность того, что случайная точка ξ в результате испытания попадет левее точки x.

Функция распределения обладает следующими свойствами.

1) $0\le F(x)\le 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}F_{\xi}(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F_{\xi}(x)=1$;

2) функция распределения $F_{\xi}(x)$ всегда неубывающая функция, то есть для любых $x_1<x_2$ выполняется неравенство: $F_{\xi}(x_1)\le F_{\xi}(x_2)$;

3) функция распределения $F_{\xi}(x)$ всегда непрерывна слева:

$$\lim_{x\to x_0-0}F_{\xi}(x)=F_{\xi}(x_0);$$

4) для любых x_1 и x_2 вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $[x_1,x_2)$ вычисляется по формуле

$$P(x_1\le\xi<x_2)=F_{\xi}(x_2)-F_{\xi}(x_1).$$

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайная величина ξ называется *дискретной*, если она принимает конечное (счетное) число значений, то есть $\xi\in\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

Пусть x_1, x_2, …, x_n ($x_1<x_2<\ldots<x_n$) возможные значения дискретной случайной величины ξ. События $(\xi=x_1)$, $(\xi=x_2)$, …, $(\xi=x_n)$ образуют полную группу событий. И пусть $P(\xi=x_1)=p_1$, $P(\xi=x_2)=p_2$, …, $P(\xi=x_n)=p_n$. Тогда $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.

Совокупность пар чисел $(x_1; p_1)$, $(x_2; p_2)$, …, $(x_n; p_n)$ называется *законом распределения дискретной случайной величины*.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины является *ряд распределения*, представляющий собой таблицу, в верхней строке которой находятся возможные значения случайной величины ξ, в нижней – соответствующие вероятности (таблица 8.1.1).

Таблица 8.1.1 – Ряд распределения дискретной случайной величины ξ

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Функция распределения $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le x_1; \\ p_1 & \text{при } x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2 & \text{при } x_2 < x \le x_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & \text{при } x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1 & \text{при } x \ge x_n. \end{cases}$$

График функции $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины представлен на рисунке 8.1.1.

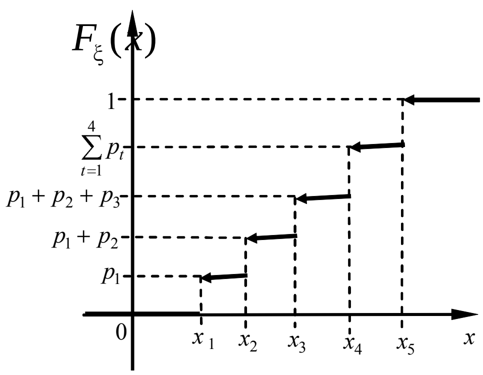

Рисунок 8.1.1 – График функции распределения дискретной случайной величины

Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если ее множество возможных значений представляет собой несчетное множество, то есть является некоторым промежутком числовой оси. Функция распределения $F_\xi(x)=P(\xi<x)$ непрерывной случайной величины ξ непрерывна. Функция $p(x)=F'_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей*, или *плотностью вероятностей* непрерывной случайной величины ξ. Она является непрерывной или кусочно-непрерывной функцией. График плотности распределения вероятностей $p(x)$ называется *кривой распределения*.

Плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1) $p(x)\geq 0$ для любого $x\in\mathbb{R}$;

2) (условие нормировки). $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt=1$;

3) $F_\xi(x)=P(\xi<x)=P(-\infty<\xi<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$;

4) $P(a\leq\xi<b)=P(a<\xi\leq b)=P(a\leq\xi\leq b)=P(a<\xi<b)=$

$=\int\limits_{a}^{b} p(t)\,dt=F(b)-F(a)$.

8.2. Числовые характеристики случайных величин

Случайные величины также описываются числовыми характеристиками.

Математическим ожиданием (средним значением по распределению) называется число, определяемое в зависимости от типа случайной величины ξ формулой:

$$M[\xi]== \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i, & \text{если } \xi \text{ дискретная случайная величина,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывная случайная величина.} \end{cases}$$

Математическое ожидание существует, если ряд (соответственно интеграл) сходится абсолютно. В противном случае математическое ожидание не существует.

Свойства математического ожидания:

1) если $\xi = C = \text{const}$, то $M(C)=C$;

2) $M(\alpha\xi)=\alpha M(\xi)$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

3) если $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ – случайные величины, то

$$M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n);$$

4) Если значения случайной величины ξ попадают в интервал $(a;b)$, то $a\le M(\xi)\le b$.

Модой $Mo(\xi)$ случайной величины ξ называется ее наиболее вероятное значение. *Медианой* $Me(\xi)$ случайной величины ξ называется такое значение случайной величины, для которого выполняется равенство $P(\xi<Me(\xi))=P(\xi>Me(\xi))$.

Дисперсией случайной величины ξ называется число, определяемое формулой $D(\xi)=M(\xi-M\xi)^2$.

В зависимости от типа случайной величины ξ имеем:

$$D(\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-M(\xi))^2 p_i, & \text{если } \xi \text{ дискретная случайная величина,}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(\xi))^2 p(x)dx, & \text{если } \xi \text{ непрерывная случайная величина.}\end{cases}$$

Дисперсия существует, если ряд (соответственно интеграл) сходится абсолютно.

Свойства дисперсии:

1) $D(\xi)\ge 0$;

2) Если $\xi=C=\text{const}$, то $D(C)=0$;

3) $D(\alpha\xi)=\alpha^2 D(\xi)$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$;

4) $D(\xi)=M\left[\xi^2\right]-(M(\xi))^2$.

Средним квадратичным отклонением $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ называется число $\sigma(\xi)=\sqrt{D[\xi]}$. Среднее квадратичное отклонение характеризует меру разброса значений случайной величины около математического ожидания.

8.3. Нормальный закон распределения

Говорят, что случайная величина ξ имеет *нормальное распределение* с параметрами a и σ^2, если ее плотность вероятностей имеет вид:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbb{R}.$$

Обозначается: $\xi\sim N(a;\sigma^2)$.

График плотности нормального распределения $p(x)$ называется *нормальной кривой* (*кривой Гаусса*).

При $a=0$, $\sigma=1$ плотность принимает вид $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и называется функцией Лапласа. В этом случае случайная величина ξ называется *стандартной нормально распределенной* случайной величиной и обозначается $\xi\sim N(0;1)$.

Графики плотностей вероятностей $p(x)$ и $\varphi(x)$ представлены на рисунке 8.3.2.

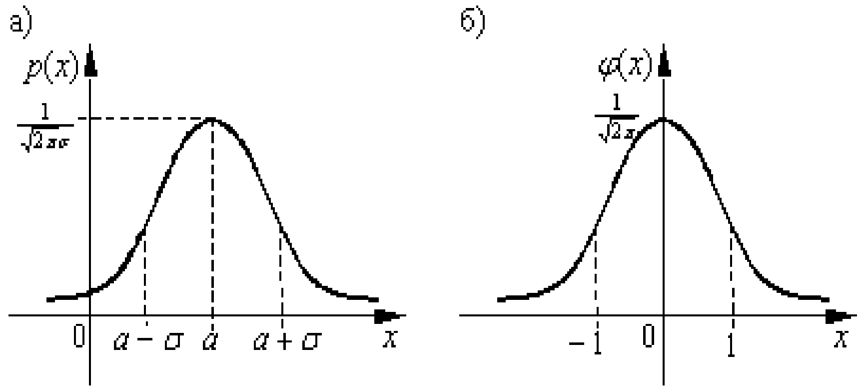

Рисунок 8.3.2 – Графики плотностей вероятностей нормального (а) и стандартного нормального (б) распределений

Соответствующая функция распределения нормальной случайной величины ξ задается соотношением $F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{dt}$, а для стандартной нормальной случайной величины – $F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{dt}$.

Графики функций $F_\xi(x)$ и $F_0(x)$ представлены на рисунке 8.3.3.

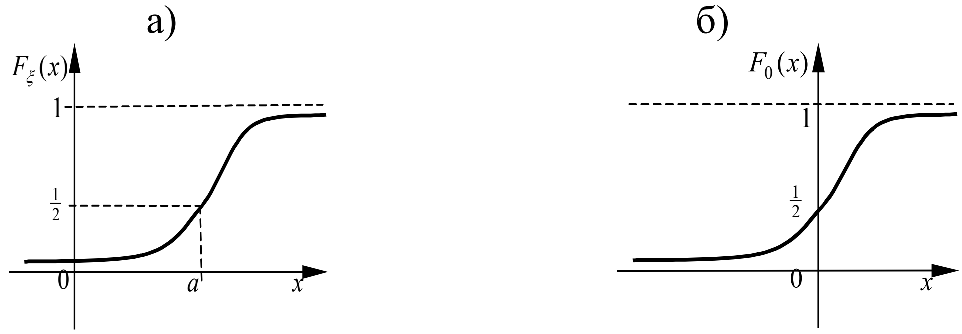

Рисунок 8.3.3 – Графики функций распределения нормального (а) и стандартного нормального (б) распределений

Функция $F_0(x)$ связана с интегральной функцией Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ соотношением $F_0(x)=0{,}5+\Phi(x)$.

Числовые характеристики нормальной случайной величины есть $M[\xi]=a$, $D[\xi]=\sigma^2$. Вероятность попадания случайной величины ξ в промежуток $(\alpha;\beta)$ выражается формулой:

$$P(\xi\in(\alpha;\beta))=\Phi\left(\frac{\beta\text{-}a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha\text{-}a}{\sigma}\right).$$

Нормальное распределение возникает тогда, когда величина ξ представляет собой сумму большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения. Например, величины, характеризующие вес почтовых отправлений, время лечения болезни, результаты тестирования, опроса, экзамена, результаты любых измерений распределены нормально.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется случайной величиной?
2. Что называется законом распределения случайной величины?
3. Что называется функцией распределения случайной величины?
4. Каковы свойства функции распределения?
5. Какая случайная величина называется дискретной?
6. Какая случайная величина называется непрерывной?
7. Что такое плотность распределения непрерывной случайной величины? Каковы ее свойства?

8. Что называется математическим ожиданием случайной величины и как оно вычисляется?

9. Что называется дисперсией случайной величины и как она вычисляется?

10. Что характеризует меру разброса значений случайной величины около математического ожидания?

11. Какая случайная величина называется распределенной по нормальному закону?

12. Где используется нормальное распределение?

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихолетов, И. И. Высшая математика, теория вероятности и математическая статистика / И. И Лихолетов. – Минск : Вышэйшая школа, 1976. – 569 с.

2. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии / П. С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 912 с.

3. Александров, Л. Д. Геометрия / Л. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. – М. : Наука, 1990. – 672 с.

4. Погорелов, А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1983. – 288 с.

5. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 ч. Ч. 2 / А. А. Гусак. – Минск : Университетское, 1984. – 383 с.

6. Бугров, Я. С. Высшая математика. Диффренциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1988. – 432 с.

7. Глаголев, А. А. Курс высшей математики / А. А. Глаголев, Т. В. Солнцева. – М. : Высшая школа, 1971. – 656 с.

8. Лобоцкая, Н. Л. Основы высшей математики / Н. Л. Лобоцкая. – Минск : Вышэйшая школа, 1978. – 352 с.

9. Прохоров, Ю. В. Математический энциклопедический словарь / Ю. В. Прохоров. – М. : Сов. Энциклопедия, 1988. – 847 с.

10. Теория выбора и принятия решений / И. М. Макаров [и др.]. – М. : Наука, 1982. – 328 с.

11. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – М. : Наука, 1984. – 256 с.

12. Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 192 с.

13. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1971. Ч. 1 – 648 с.; 1973. Ч. 2 – 464 с.

14. Фридман, Л. П. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л. П. Фридман. – М. : Просвещение, 1983. – 160 с.

Производственно-практическое издание

Кравченко Юрий Владимирович,
Бычков Павел Владимирович

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Математический анализ и теория вероятностей

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 29.05.2019. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 442.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.