Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

ОБ ИНДЕКСЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 16 III 1970)

Рассматриваются операторы вида

$$H\varphi \equiv \varphi(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} a_j(t, \tau) h_j(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где $h_j(t) \in \mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$, $\varphi(t)$, $f(t) \in \mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $a_j(t, \tau)$, принадлежат некоторому классу существенно ограниченных измеримых на плоскости функций (определение 3). Основной результат сформулирован в теореме 1. Полученные в n°2 результаты применяются далее к исследованию одной краевой задачи Римана с интегральными слагаемыми и некоторого класса интегральных уравнений с ядром типа однородной функции. Настоящая работа непосредственно примыкает к предыдущей работе авторов ([12]), в которой изучался случай вырождения функций $a_j(t, \tau)$: $a_j(t, \tau) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(t) b_{kj}(\tau)$.

Класс уравнений, близкий к (1), был рассмотрен в ([7]). Некоторые специальные случаи уравнения (1) рассматривались в работах ([3-6]). Отметим еще, что в случае непрерывности функций $a_j(t, \tau)$ получаемая нами теорема 1 может быть доказана также с помощью результатов И. Б. Симоненко по теории операторов локального типа ([8]).

n°1. Класс $M^{\sup}(\bar{R}_2)$. Определим класс функций $a_j(t, \tau)$, допускаемых в уравнении (1). Грубо говоря, это будет класс функций, имеющих (в определенном смысле) хотя бы один из повторных пределов в каждой из бесконечно удаленных точек $(-\infty, -\infty)$ и $(+\infty, +\infty)$. Перейдем к точному определению. Обозначим через $\bar{R}_1$ прямую R_1 с двумя присоединенными бесконечно удаленными точками. Через $\bar{R}_2$ обозначим плоскость R_2, пополненную бесконечно удаленными точками $(+\infty, +\infty)$, $(-\infty, -\infty)$. Как обычно, $M = M(R_1)$, $M(R_2)$ будет означать соответствующий класс существенно ограниченных измеримых функций.

Определение 1. $\varphi(t) \in M^{\sup}(\bar{R}_1)$, если $\varphi(t) \in M(R_1)$ и существуют постоянные c_+, c_- такие, что *

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|>n} \theta(\pm t)|\varphi(t) - c_\pm| = 0, \quad \text{где} \quad \theta(t) = {}^1/_2(1 + \operatorname{sign} t).$$

Будем обозначать $c_\pm = \varphi(\pm\infty)$.

Определение 2. Будем говорить, что измеримая существенно ограниченная функция $a(t, \tau)$ имеет значение $a(+\infty, +\infty)$, если существует функция $b(x) \in M^{\sup}(\bar{R}_1)$ такая, что $b(+\infty) = a(+\infty, +\infty)$ и либо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0<\tau<\infty} \sup_{t>n} |a(t, \tau) - b(\tau)| = 0. \tag{2}$$

* Всюду в дальнейшем sup означает ess sup.

либо

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0<t<\infty}\sup_{\tau>n}|a(t,\tau)-b(t)|=0. \tag{3}$$

Аналогично определяется значение $a(-\infty, -\infty)$. Заметим, что определение 2 корректно в том отношении, что если $a(t, \tau)$ имеет значение $a(+\infty, +\infty)$ одновременно и в смысле (2), и в смысле (3), то оно одно и то же.

Определение 3. $a(t, \tau)\in M^{\sup}(\bar{R}_2)$, если $a(t, \tau)\in M(R_2)$ и существуют значения $a(+\infty, +\infty)$, $a(-\infty, -\infty)$ в смысле определения 2. Очевидно, класс $M^{\sup}(\bar{R}_2)$ содержит класс $C(\bar{R}_2)$ непрерывных функций, определяемый свойствами: 1) $a(t, \tau)$ ограничена на R_2 и непрерывна в каждой конечной точке; 2) существует один из повторных пределов $\lim\limits_{\tau\to\infty}\lim\limits_{t\to\infty} a(t, \tau)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\lim\limits_{\tau\uparrow\infty} a(t, \tau)$, причем внутренний предел равномерен (по τ, $0<\tau<\infty$, и по t, $0<t<\infty$, соответственно); существует аналогичный предел при $t, \tau\to-\infty$. Отметим, что определение 3 не накладывает на функцию $a(t, \tau)$ никаких требований во втором и четвертом квадрантах, кроме принадлежности $M(R_2)$.

n°2. Основная теорема. *Пусть* $h_j(t)\in\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$ *и* $a_j(t, \tau)\in M^{\sup}(\bar{R}_2)$.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор H был оператором Нетера в $\mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma(\lambda)^{\pm}=1+\sum_{j=1}^{n}a_j(\pm\infty, \pm\infty)\mathscr{H}_j(\lambda)\neq 0, \quad \textit{где}\ \mathscr{H}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{i\lambda t}\,dt.$$

Индекс оператора H вычисляется по формуле

$$\varkappa_{\mathscr{L}_p}(H)=-\frac{1}{2\pi}\Delta\left[\arg\frac{\sigma(\lambda)^+}{\sigma(\lambda)^-}\right]_{-\infty}^{\infty}. \tag{4}$$

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма 1. *Если $h(t)\in\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$ и $a(t,\tau)\in M^{\sup}(\bar{R}_2)$, то операторы* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}[a(t, \tau)-a(\infty, \infty)\theta(t)-a(-\infty, -\infty)\theta(-t)]h(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$, $\theta(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(t, \tau)\theta(-\tau)h(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$ *вполне непрерывны в* $\mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

n°3. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\Phi^+(t)+\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\tau)h_1(t-\tau)\Phi^+(\tau)\,d\tau=$$

$$=G(t)\Phi^-(t)+\int_{-\infty}^{\infty}b(t,\tau)h_2(t-\tau)\Phi^-(\tau)\,d\tau+f(t), \quad -\infty<t<\infty, \tag{5}$$

где $\Phi^{\pm}(z)$ — аналитические функции в полуплоскостях $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Im} z<0$ соответственно, представимые интегралом типа Коши с плотностью из $\mathscr{L}_p(-\infty, \infty)$; $p>1$ $(\Phi^{\pm}(t)\in\mathscr{L}_p^{\pm})$. Предполагается, что 1) $h_1(t)$, $h_2(t)\in\mathscr{L}_1(-\infty, \infty)$; 2) $a(t, \tau)$, $b(t, \tau)\in M^{\sup}(\bar{R}_2)$, причем $a(+\infty, +\infty)=a(-\infty, -\infty)$ и $b(+\infty, +\infty)=b(-\infty, -\infty)$; 3) $G(t)\in M^{\sup}\cap A_p$ и $G(-\infty)=G(+\infty)$ (определение класса A_p см. в ([2])). В частности, можно считать $G(t)$ непрерывной на сомкнутой оси функцией, $G(t)\neq 0$.

Известно, что в случае конечного контура и фредгольмовских ядер индекс задачи вида (5) (а также более общих интегро-дифференциальных задач не зависит от интегральных (фредгольмовских) слагаемых (см. ([1]), стр. 362). Это, оказывается, верно и для задачи (5), содержащей интегральные слагаемые с разностным ядром. Однако условие нормальной разрешимости будет зависеть от интегральных слагаемых. Мы укажем также случай, когда задача (5) разрешима в замкнутой форме.

Теорема 2. *Если* $1 + a(\infty, \infty)\mathscr{H}_1(x) \neq 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant \infty$ *и* $G(\infty) + b(\infty, \infty)\mathscr{H}_2(x) \neq 0$, $-\infty \leqslant x \leqslant 0$, *где* $\mathscr{H}_j(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_j(t) e^{itx} dt$, $j = 1, 2$, *то задача* (5) *нётерова в* $\mathscr{L}_p^\pm$ *и ее индекс равен индексу коэффициента* $G(t)$.

В силу леммы задача (5) лишь вполне непрерывным слагаемым отличается от задачи

$$A\Phi \equiv \Phi^+(t) + a(\infty, \infty) \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)\Phi^+(\tau)\,d\tau -$$

$$- G(t)\left[\Phi^-(t) + \frac{b(\infty, \infty)}{G(\infty)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau)\Phi^-(\tau)\,d\tau\right] = f(t). \tag{6}$$

Обозначив $H_1\Phi^+ \equiv a(\infty, \infty)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)\Phi^+(\tau)\,d\tau = \Phi_1^+(t)$, $H_2\Phi^- \equiv \frac{b(\infty, \infty)}{G(\infty)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau)\Phi^-(\tau)\,d\tau = \Phi_1^-(t)$, мы видим, что (6) сводится к последовательному решению задачи Римана $\Phi^+(t) + \Phi_1^+(t) = G(t)[\Phi^-(t) + \Phi_1^-(t)]$ и интегральных уравнений типа свертки (по всей оси) в классе аналитических функций. Другими словами, имеет место представление $A = B \cdot C$, где $B = {}^1/_2(I + S) + {}^1/_2 G(I - S)$, $C = {}^1/_2(I + H_1)(I + S) + {}^1/_2(I + H_2)(I - S)$, G — оператор умножения на функцию $G(t)$ и $S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$. В силу условий теоремы оператор C обратим. Естественно, задача (6) решается в замкнутом виде. Следовательно, задача (5) разрешима в замкнутом виде, если $a(t, \tau) = \text{const}$, $b(t, \tau) = \gamma G(t)$, $\gamma = \text{const}$. Заметим, что уравнение (6) обобщает уравнение вида $\varphi + \lambda S\varphi + H_1\varphi = f$, рассмотренное в $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ Г. И. Савельевым ([9]).

n°4. Рассмотрим уравнение

$$K\psi \equiv \psi(x) + \int\limits_0^a \gamma(x, y) k(x, y) \psi(y)\,dy = g(x), \quad 0 < x < a, \tag{7}$$

где $k(x, y)$ — однородная функция произвольного порядка α: $k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha k(x, y)$, причем предполагается, что существует число β такое, что выполняется одно из условий суммируемости:

$$\int\limits_0^\infty |k(1, y)| \frac{dy}{y^\beta} < \infty, \quad \int\limits_0^\infty |k(x, 1)| \frac{dx}{x^{1-\beta}} < \infty. \tag{8}$$

Функция $\gamma(x, y)$ будет принадлежать некоторому подклассу измеримых в основном квадрате функций, ограниченных всюду, кроме, быть может, начала координат.

Решения разыскиваем в весовом пространстве

$$\mathscr{L}_p^\beta = \{\psi : x^{\beta - 1/p}\psi(x) \in \mathscr{L}_p(0, a)\}.$$

Если в (8) допустимы значения $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, то уравнение (7) можно рассматривать во всех $\mathscr{L}_p(0, a)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Обозначим $Q = \{x, y : 0 < x < a, 0 < y < a\}$.

Определение 4. Будем говорить, что $\omega(x, y) \in M^{\sup}(Q)$, если: 1) $\omega(x, y)$ — измеримая, существенно ограниченная на Q функция; 2) $\omega(x, y)$ имеет значение $\omega(0, 0)$, определяемое аналогично значению $a(\infty, \infty)$ в определении 2.

Теорема 3. *Пусть $\gamma_1(x, y) = x^{1+\alpha}\gamma(x, y) \in M^{\sup}(Q)$. Для того чтобы оператор K был оператором Нётера в пространстве $\mathscr{L}_p^\beta$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(\lambda) = 1 + \gamma_1(0, 0)\mathfrak{M}(i\lambda - \beta + 1) \neq 0$, $-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty$, где $\mathfrak{M}(s) = \int\limits_0^\infty k(1, y)y^{s-1}dy$. Индекс оператора K вычисляется по формуле*

$$\varkappa_{\mathscr{L}_p^\beta}(K) = -\frac{1}{2\pi}\Delta[\arg\sigma(\lambda)]_{-\infty}^{\infty}.$$

Теорема 3 устанавливается сведением уравнения (7) к уравнению (1). Она для простоты сформулирована для ядра $k(x, y)$, удовлетворяющего первому из условий суммируемости (8), и легко переносится на случай, когда $k(x, y)$ удовлетворяет второму из условий (8). Заметим, что аналогичный результат для $\alpha = -1$ и $\gamma(x, y) \in C(Q)$ иным путем ранее был получен в работах Л. Г. Михайлова ([10], [11]). Наконец, теорема, аналогичная теореме 3, может быть получена для случая $a = \infty$, а также для более общего чем (7) уравнения

$$K\psi \equiv \psi(x) + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^a \gamma_j(x, y)k_j(x, y)\psi(y)dy = g(x), \quad 0 < x < a.$$

В заключение рассмотрим пример

$$A\psi \equiv \psi(x) + \int\limits_0^\infty \frac{\gamma(x, y)}{x+y}\psi(y)dy = f(x), \quad x > 0,$$

где $\gamma(x, y) \in M^{\sup}(Q)$, $f(x)$, $\psi(x) \in \mathscr{L}_p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$. Пусть $\gamma_0 = \gamma(0, 0)$, $\gamma_\infty = \gamma(\infty, \infty)$ — значения в смысле определения (2). Условие нётеровости имеет вид: $\gamma_0, \gamma_\infty > -1/\pi$ при $p = 2$ и $\gamma_0, \gamma_\infty \neq -\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{p}$ при $p \neq 2$, а индекс $\varkappa$ оператора A при выполнении этого условия равен

$$\varkappa = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_0, \gamma_\infty > -\sin(\pi/p)/\pi \text{ или } \gamma_0, \gamma_\infty < -\sin(\pi/p)/\pi \\ \operatorname{sign}(p-2), & \text{если } \gamma_0 > -\sin(\pi/p)/\pi,\ \gamma_\infty < -\sin(\pi/p)/\pi, \\ \operatorname{sign}(2-p), & \text{если } \gamma_0 < -\sin(\pi/p)/\pi,\ \gamma_\infty > -\sin(\pi/p)/\pi. \end{cases}$$

Ростовский государственный
университет

Поступило
11 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. [2] И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 2, 277 (1964). [3] И. Б. Симоненко, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 2 (9), 213 (1959). [4] Ф. Д. Беркович, Там же, № 12, 15 (1967). [5] И. И. Комяк, ДАН, 179, № 2, 279 (1968). [6] Л. С. Раковщик, УМН, в. 4, 171 (1963). [7] Л. С. Раковщик, Вестник ЛГУ, сер. матем. и астрон., № 3, в. 3, 52 (1961). [8] И. Б. Симоненко, Матем. сборн., 174 (116), № 2, 298 (1967). [9] Г. И. Савельев, Тр. Новочеркасск. политехн. инст., 109, 3 (1960). [10] Л. Г. Михайлов, Интегральные уравнения с ядром однородным степени —1, Душанбе, 1966. [11] Л. Г. Михайлов, Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1969, стр. 54. [12] Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, ДАН, 193, № 5 (1970).