Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 519.281 МАТЕМАТИКА

Л. Б. КЛЕБАНОВ

ДОПУСТИМОСТЬ ВЫБОРОЧНОГО СРЕДНЕГО КАК ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА СДВИГА ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УЩЕРБАХ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 4 III 1970)

1. Рассматривается задача оценивания параметра $\theta \in R^1$ по данным повторной выборки $(x_1, \ldots, x_n)$ из совокупности с функцией распределения (ф.р.) $F(x-\theta)$.

Если $\bar\theta = \bar\theta(x_1, \ldots, x_n)$ — оценка параметра θ, то потери, которые мы несем при этом, задаются функцией $r(\bar\theta; \theta)$, называемой функцией потерь (ущербом). Математическое ожидание функции потерь $R(\bar\theta; \theta) = E_\theta r(\bar\theta; \theta)$ называется риском оценки $\bar\theta$. При заданном риске естественным образом вводится понятие допустимости.

Если ущерб квадратический, $r(\bar\theta; \theta) = (\bar\theta - \theta)^2$, то при $n \geqslant 3$ допустимость выборочного среднего $\bar x = (x_1 + \ldots + x_n)/n$ как оценки параметра θ эквивалентна нормальности $F(x)$ [1] (см. также [2]).

Аналогичный результат (при довольно жестких ограничениях на $F(x)$) был установлен в работе [3] для ущербов

$$r(\tilde\theta; \theta) = \begin{cases} -\alpha(\tilde\theta - \theta) & \text{при } \tilde\theta \leqslant \theta, \\ \beta(\tilde\theta - \theta) & \text{при } \tilde\theta \geqslant \theta, \ \alpha, \beta > 0, \end{cases}$$

и ущербов вида $r(\bar\theta; \theta) = |\bar\theta - \theta|^{2m-1}$.

Здесь будет сформулирован аналогичный результат, относящийся к полиноминальным ущербам.

2. Пусть $P(u)$ — полином от u степени m с положительными коэффициентами. Рассмотрим функцию потерь $r(\bar\theta; \theta) = P((\bar\theta - \theta)^2)$.

Теорема. *Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — повторная выборка из совокупности с ф.р. $F(x-\theta)$, имеющей две непрерывные производные и удовлетворяющей условиям*

$$\int x\,dF(x) = 0, \tag{1}$$

$$\int x^{2m}\,dF(x) < +\infty. \tag{2}$$

Тогда, если выборочное среднее $\bar x$ допустимо в классе несмещенных оценок θ, то $F(x)$ — ф.р. нормального закона.

Доказательство основано на тех же соображениях, которые были использованы в работах [1, 2].

Из допустимости $\bar x$ получаем

$$\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=2m-1\\ k_i\geqslant 0}} A_{k_1\ldots k_n}\varphi^{(k_1)}_{(\tau_1)} \cdots \varphi^{(k_n)}_{(\tau_n)} = 0 \tag{3}$$

для всех $\tau_1, \ldots, \tau_n$, связанных соотношением $\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i = 0$. Здесь $\varphi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x}\,dF(x)$.

С помощью замены искомой функции и последующего дифференцирования можно убедиться, что мыслимы только два случая:

1) Все производные функции $\varphi(x)$, вычисленные при $\tau = 0$, совпадают с соответствующими производными функции $\exp\ \{Q(\tau)\}$, где $Q(\tau)$ — некоторый полином. В силу известной теоремы Марцинкевича ([4]) это означает, что $\varphi(\tau)$ — характеристическая функция нормального распределения.

2) $\varphi(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi^{(2m-1)}_{(\tau)} = (a_1\tau + b_1)\varphi(\tau), \tag{4}$$

где a_1, b_1 — некоторые постоянные.

Применяя к (4) обратное преобразование Фурье, получаем, что плотность вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = C \exp\{ax^{2m} + bx\}. \tag{5}$$

Но условие допустимости $\bar{x}$, записанное в терминах плотности, имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P'(u)\prod_{i=1}^{n} f(u + z_i)\,du = 0 \tag{6}$$

для всех z_i : $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i = 0$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что плотность (5) при $m > 1$ не может удовлетворять условию (6), т. е. случай 2) невозможен.

3. Отметим, что дифференцируемостью $F(x)$ мы пользовались лишь тогда, когда определяли, что из (4) следует (5). Если же $m = 1$, то (4) интегрируется непосредственно и, очевидно, $\varphi(x)$ — характеристическая функция нормального закона. Таким образом, результат работы ([1]) является частным случаем нашего.

В заключение выражаю глубокую благодарность Ю. В. Линнику и А. М. Кагану за внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
9 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Kagan, Y. V. Linnik, C. R. Rao, Sankhyā, A 27, 2—3—4 (1965). [2] А. М. Каган, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 104 (1968). [3] А. А. Зингер, А. М. Каган, Л. Б. Клебанов, ДАН, 189, № 1, 29 (1969). [4] J. Marcinkiewicz, Math. Zs., 44, № 4—5, 612 (1938).