Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. А. БОРОВКОВ

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Пусть на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задана последовательность пар случайных величин $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s;\ j \geqslant \infty\}$. Мы будем говорить, что m-канальная система обслуживания с отказами управляется этой последовательностью, если вызовы поступают в систему в моменты времени 0, τ_1^e, $\tau_1^e + \tau_2^e, \ldots$ и на обслуживание j-го вызова (если таковое состоится) тратится время τ_j^s. Если пришедший вызов застает все m каналов занятыми, то он получает отказ и выбывает из рассмотрения. Если же число q_n занятых каналов в момент перед приходом n-го вызова меньше m, то вызов принимается на обслуживание одним из свободных каналов. Таким образом, для рассматриваемых систем всегда $q_n \leqslant m$. Мы будем считать для простоты, что $q_1 = 0$ (см. п. 4).

Наряду с «занятостью» q_n мы будем рассматривать более точные характеристики систем — процессы $\{q_n(x);\ n \geqslant 1,\ x \geqslant 0\}$, где значение $q_n(x)$ указывает, сколько вызовов из тех, что были в системе перед моментом $t_n = \tau_1^e + \ldots + \tau_{n-1}^e$ прихода n-го вызова, останутся в ней спустя время x (т. е. в момент $t_n + x$), так что $q_n = q_n(0)$.

Предположим, что управляющая последовательность строго стационарна. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задана «бесконечная в обе стороны» стационарная последовательность

$$\{\tau_j^e,\ \tau_j^s;\ -\infty < j < \infty\}, \tag{1}$$

последовательностью которой и происходит управление системой.

2. Пусть сначала число каналов $m = \infty$. Обозначим $I(A)$ индикатор события A,

$$\begin{aligned} q^k(x) = I(\tau_k^s > \tau_k^e + x) + I(\tau_{k-1}^s > \tau_{k-1}^e + \tau_k^e + x) + \\ + I(\tau_{k-2}^s > \tau_{k-2}^e + \tau_{k-1}^e + \tau_k^e + x) + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. *Если последовательность (1) строго стационарна,* $\mathrm{M}\tau^e > \infty$, *а последовательность* $\{\tau_j^e;\ -\infty < j < \infty\}$ *кроме того метрически транзитивна, то распределение процессов*

$$\{q_{n,k}(x);\ k \geqslant 0;\ x \geqslant 0\} = \{q_{n+k}(x);\ k \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$$

монотонно сходится при $n \to \infty$ *к распределению собственного стационарного по* k *процесса*

$$\{q^k(x);\ k \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}.$$

Точнее: для каждого n *существует процесс* $\tilde{q}^k(x)$ *с тем же распределением, что и* $q^k(x)$, *и такой, что* $q_{n+k}(x) \leqslant \tilde{q}^k(x)$, *возрастает по* n *и при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{x \geqslant 0} \{q_{n+k}(x) \neq \tilde{q}^k(x)\}\Big) \to 0.$$

Доказательство этой теоремы нетрудно получить, пользуясь стационарностью управляющей последовательности и представлением

$$q_n(x) = I(\tau_1^s > \tau_1^e + \ldots + \tau_{n-1}^e + x) + I(\tau_2^s > \tau_2^e + \ldots + \tau_{n-1}^e + x) + \ldots$$
$$\ldots + I(\tau_{n-1}^s > \tau_{n-1}^e + x).$$

Теорема 2. *Если $\{\tau_j^e\}$ и $\{\tau_j^s\}$ — две независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин и $M\tau^e < \infty$, то условие $M\tau^s < \infty$ необходимо и достаточно для конечности $q_n(x)$. Вероятности*

$$P_k(x) = P(q^0(x) = k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

удовлетворяют уравнениям

$$P_0(x) = \int_0^\infty dP(\tau^e < t) P(\tau^s < t + x) P_0(t + x),$$

$$P_k(x) = \int_0^\infty dP(\tau^e < t) P(\tau^s \geqslant t + x) P_{k-1}(x) +$$
$$+ \int_0^\infty dP(\tau^e < t) P(\tau^s < t + x) P_k(t + x), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

имеющим в классе систем функций ограниченной вариации, обладающих свойствами $P_0(x) \to 1$, $P_k(x) \to \infty$, при $k \geqslant 1$, $x \to \infty$, единственное решение.

Отсюда легко получить, в частности, что если $P(\tau^e \geqslant x) = e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, то

$$P_k(x) = \frac{1}{k!} \left(\int_x^\infty \alpha P(\tau^s \geqslant t)\, dt \right)^k \exp\left\{ -\int_x^\infty \alpha P(\tau^s \geqslant t)\, dt \right\}.$$

Аналогичными свойствами обладает «занятость» $q(t, x)$ в момент времени t, т. е. число вызовов, которые находятся в системе в момент $t + x$, и обслуживание которых уже длится время большее чем x. Если $P(\tau^e \geqslant x) = e^{-\alpha x}$, то предельные распределения $q_n(x)$ и $q(t, x)$ при $n \to \infty$, $t \to \infty$ совпадают.

3. Число каналов $m < \infty$. Сохраняя обозначения управляющей последовательности и $q_n(x)$, мы обозначим теперь правую часть в (2) через $Q_k(x)$. Это есть, как мы видели, стационарная характеристика системы, управляемой той же последовательностью (1), но с бесконечным числом каналов. Обозначим далее A_k событие, состоящее в том, что при каких-нибудь $0 \leqslant L \leqslant m - 1$, $l_j \geqslant 1$, $j = 0, L$ таких, что $\sum_{j=0} l_j = m$, выполняются неравенства

$$Q_k(0) \leqslant m - l_0, \quad Q_k(\tau_{k+1}^e) \leqslant m - l_0 - l_1, \ldots, \quad Q_k(\tau_{k+1}^e + \ldots + \tau_{k+L}^e) \leqslant$$
$$\leqslant m - l_0 - \ldots - l_L = 0.$$

Теорема 3. *Пусть последовательность (1) строго стационарна и метрически транзитивна. Пусть, кроме того, выполнено условие*

$$P(A_0) > 0. \tag{3}$$

Тогда распределение процессов $\{q_{n+k}(x);\ k \geqslant 0, x \geqslant 0\}$ при $n \to \infty$ сходится к распределению некоторого стационарного по k процесса $\{q^k(x); k \geqslant 0, x \geqslant 0\}$ такого, что

$$P(q^0(0) < m) < 1.$$

Сходимость здесь понимается в том же сильном смысле, что и в теореме 1.

Существуют различные простые достаточные условия, обеспечивающие выполнение (3).

Рассмотрим, например, случай, когда $\{\tau_j^e\}$, $\{\tau_j^s\}$ составлены из независимых величин. Тогда для выполнения (3) достаточно, чтобы

$$\mathbf{P}(\tau^s \leqslant m\tau^e) > 0, \quad \mathbf{M}\tau^s < \infty. \tag{4}$$

Достаточным будет также и в некотором смысле противоположное условие: при всех $x \geqslant x_0$, $\Delta > 0$

$$\mathbf{P}(\tau^s \in (x, x+\Delta)) > 0, \quad \mathbf{M}\tau^s < \infty \tag{5}$$

для некоторого $x_0 > 0$.

Опишем теперь для независимых τ_j^e, τ_j^s предельное распределение $q_n(x)$. Траектория невозрастающего ступенчатого процесса $q^0(x)$, очевидно, полностью описывается положением его скачков. Обозначим

$$\mu(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j \text{ раз}}, dx_{j+1}, \ldots, dx_m)$$

вероятность того, что $q^0(0) = m - j$, а $(m-j)$ скачков процесса $q^0(x)$ заключены соответственно в интервалах $dx_k = (x_k, x_k + dx_k)$, $k = j+1, \ldots, m$ (использование символа dx_k одновременно для обозначения скалярной величины и интервала к недоразумениям не приведет).

Теорема 4. *При выполнении* (4) *или* (5) *стационарное распределение* $\mu(0, \ldots, 0, dx_{j+1}, \ldots, dx_m)$, $j = 0, \ldots, m$, *удовлетворяет уравнению*

$$\mu(0, \ldots, 0, dx_{j+1}, \ldots, dx_m) = \sum_{k=j+1}^{m} \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau^e \in dt)\,\mathbf{P}(\tau^s \in t + dx_k)\, M_{1,k} + \\ + \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau^e \in dt)\,\mathbf{P}(\tau^s \leqslant t)\, M_2 + \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau^e \in dt)\, M_3, \tag{6}$$

где

$$M_{1,k} = \int \ldots \int\limits_{0 \leqslant y_2 \leqslant y_3 \leqslant \ldots \leqslant y_{j+1} \leqslant t} \mu(0, dy_2, \ldots, dy_{j+1}, dx_{j+1} + t, \ldots, dx_{k-1} + \\ + t, dx_{k+1} + t, \ldots, dx_m + t).$$

$$M_2 = \int \ldots \int\limits_{0 \leqslant y_2 \leqslant y_3 \leqslant \ldots \leqslant y_j \leqslant t} \mu(0, dy_2, \ldots, dy_j, dx_{j+1} + t, \ldots, dx_m + t),$$

$$M_3 = \int \ldots \int\limits_{0 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_j \leqslant t} \mu(dy_1, \ldots, dy_j, dx_{j+1} + t, \ldots, dx_m + t).$$

Это уравнение имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$\int \ldots \int\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m} \mu(dx_1, \ldots, dx_m) = 1.$$

В этих формулах под интервалом dy при $y = 0$ следует понимать точку 0. Так что в интегралы $M_{1,k}$ и M_2 входят и «дискретные» значения, такие как $\mu(0, \ldots, 0, dx_{j+1} + t, \ldots, dx_m + t)$ (в M_2) и др. В M_3 они не входят.

В уравнении для $\mu(0, \ldots, 0)$ в правой части будут отсутствовать слагаемые, содержащие $M_{1,k}$, в уравнении для $\mu(dx_1, \ldots, dx_m)$ при $x_1 > 0, \ldots, x_m > 0$ — слагаемое, содержащее M_2. Интеграл M_3 в этом уравнении перейдет в $\mu(dx_1 + t, \ldots, dx_m + t)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, например, что в случае $\mathbf{P}(\tau^e \geqslant x) = e^{-\alpha x}$, $M\tau^s = a < \infty$

$$\mu(0, \ldots, 0,\; dx_{j+1}, \ldots, dx_m) = c\alpha^{m-j}\mathbf{P}(\tau^s \geqslant x_{j+1}) \ldots \mathbf{P}(\tau^s \geqslant x_m)\, dx_{j+1} \ldots dx_m,$$

$$c = \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{(a\alpha)^k}{k!}\right]^{-1},$$

удовлетворяет уравнению (6) и, стало быть, является стационарным распределением $q^k(x)$.

Как и при $m = \infty$, здесь можно установить также, что для показательного распределения τ^e предельные распределения $q_n(x)$ и $q(t, x)$ при $n \to \infty$, $t \to \infty$ совпадают. Отсюда будет следовать, в частности, теорема Севастьянова относительно формул Эрланга для предельного при $t \to \infty$ распределения $q(t, x)$.

Когда τ_j^e, τ_j^s независимы, можно оценить также скорость сходимости распределения $q_n(x)$ к стационарному. Если, например, $\mathbf{P}(\tau^s \leqslant \tau^e) > 0$ и $Me^{\lambda\tau^s} < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, то эта скорость сходимости связывается экспоненциальной.

При $m = 1$ из теоремы 3 вытекает

Теорема 5. *Если последовательность* (1) *строго стационарна и метрически транзитивна и*

$$\mathbf{P}(\tau_0^s \leqslant \tau_0^e,\; \tau_{-1}^s \leqslant \tau_{-1}^e + \tau_0^e, \quad \tau_{-2}^s \leqslant \tau_{-2}^e + \tau_{-1}^e + \tau_0^e, \ldots) > 0,$$

то существует

$$p(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(q_n(x) = 1). \tag{7}$$

Если векторы (τ_j^e, τ_j^s) *независимы и* d *есть общий наибольший делитель чисел* k, *для которых*

$$r_k = \mathbf{P}(\tau_1^s \in (X_{k-1}, X_k)) > 0, \quad X_k = \sum_{j=1}^{k} \tau_j^e,$$

то для существования (7) *необходимо и достаточно, чтобы* $d = 1$. *При выполнении этого условия*

$$p(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kr_k\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau_1^s > X_j + x).$$

4. Теоремы существования стационарного предельного распределения для последовательности $\{q_{n+k}(x);\; k \geqslant 0,\; x \geqslant 0\}$ при $n \to \infty$, сформулированные выше, допускают обобщение в следующих трех направлениях одновременно:

1) Для произвольных собственных начальных условий (в момент времени 0 занято q_0 каналов и времена обслуживания «начальных» вызовов равны $\rho_1, \ldots, \rho_{q_0}$).

2) Вызовы могут поступать группами. В этом случае на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ следует рассматривать строго стационарные последовательности, скажем, вида $\{\tau_j^e, \nu_j^e, \boldsymbol{\tau}^s;\; -\infty < j < \infty\}$, где ν_j^e — число вызовов, пришедших в j-й партии, $\boldsymbol{\tau}^s = (\tau_{j,1}^s, \ldots, \tau_{j,\nu_j^e}^s)$ — вектор времен обслуживания вызовов j-й партии. В этом случае условие $\mathbf{M}\tau^s < \infty$ теоремы 1 надо заменить требованием $\mathbf{M}[\boldsymbol{\tau}^s] < \infty$, где $[\mathbf{x}]$ означает сумму координат вектора $\mathbf{x}$.

3) Для существования предельного распределения $q_{n+k}(x)$ последовательность (1) вовсе не обязана быть стационарной. Достаточно лишь, чтобы в известном смысле последовательности $\{\tau^e{}_j,\; \tau^s{}_j;\; j \geqslant 0\}$ сходились при $n \to \infty$ к стационарной.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
21 V 1970