Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 1

УДК 517.994+517.43

МАТЕМАТИКА

Ш. А. АЛИМОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $B^{\alpha}_{p,\theta}$ В РЯД ФУРЬЕ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 II 1970)

Рассмотрим произвольную N-мерную область g, звездную относительно некоторого шара, и произвольную фундаментальную систему функций (ф.с.ф.) $\{u_n(x)\}$ оператора Лапласа в этой области (т. е. полную ортонормированную систему собственных функций произвольного неотрицательного самосопряженного расширения оператора Лапласа в области g со спектром, состоящим из собственных значений $\lambda_n \geqslant 0$).

Настоящая работа посвящена изучению разложений функций из класса $B^{\alpha}_{p,\theta}$ в ряд Фурье по системе $\{u_n(x)\}$ *. В дальнейшем через $\mathring{B}^{\alpha}_{p,\theta}(g)$ будем обозначать множество функций $f(x)$, принадлежащих во всем пространстве классу Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(E_N)$ и равных нулю вне области g.

Для произвольной функции $f(x) \in L_2(g)$ с коэффициентами Фурье f_n по системе $\{u_n(x)\}$ и любого $a > 0$ определим величину

$$\rho_a(f) = \Big(\sum_{a < \sqrt{\lambda_n} \leqslant 2a} f_n^2\Big)^{1/2}. \tag{1}$$

Справедлива следующая теорема о коэффициентах Фурье функций $f(x) \in \mathring{B}^{\alpha}_{2,\theta}(g)$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$ и θ удовлетворяет условию $1 \geqslant \theta \leqslant \infty$. Тогда для произвольной функции $f(x) \in \mathring{B}^{\alpha}_{2,\theta}(g)$ справедливо неравенство*

$$\Big[\sum_{m=0}^{\infty} (2^{m\alpha}\rho_{2^m}(f))^{\theta}\Big]^{1/\theta} \leqslant c\|f\|_{B^{\alpha}_{2,\theta}}. \tag{2}$$

Остановимся кратко на схеме доказательства теоремы. Для любого вектора u и любого номера m введем обозначение

$$\Delta_u^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_m^k f(x+ku). \tag{3}$$

Определим для $h > 0$ модуль непрерывности порядка m

$$\omega_m(f,h) = \sup_{|u| \leqslant h} \|\Delta_u^m f(x)\|_{L_2(E_N)}.$$

Выберем сферическую систему координат (r, θ) с началом в центре шара, относительно которого область g является звездной, и введем обозначение

$$\tilde{\Delta}_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_m^k f(r+kh, \theta).$$

---

* Определение классов Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}$, а также классов Никольского H^{α}_{p} и Лиувилля L^{α}_{p} см. ([1]).

Определим сферический модуль непрерывности порядка m

$$\widetilde{\omega}_m(f, h) = \sup_{0<t<h} \| \widetilde{\Delta}_t^m f(x) \|_{L_2(E_N)}.$$

Для любого номера m и $t \geqslant 0$ введем функцию

$$\psi_m(t) = 2^{N/2-1}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_m^k (kt)^{1-N/2} J_{N/2-1}(kt).$$

Применяя к функции (3) формулу среднего значения и воспользовавшись равенством Парсеваля, мы получаем основную оценку

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_m^2 (h\sqrt{\lambda_n})\, f_n^2\right]^{1/2} \leqslant c\,[\omega_m(f, h) + \widetilde{\omega}_m(f, h)]. \tag{4}$$

Из принадлежности функции $f(x)$ классу $B_{2,\theta}^{\alpha}$ для $\omega_m(f, h)$ вытекает оценка $(m > \alpha)$

$$\left(\int_0^{\infty} (h^{-\alpha}\omega_m(f, h))^{\theta} \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta} \leqslant c\|f\|_{B_{2,\theta}^{\alpha}}. \tag{5}$$

Представляя $f(x) \in B_{2,\theta}^{\alpha}$ в виде ряда, члены которого являются функциями экспоненциального типа, нетрудно убедиться в справедливости оценки (5) и для $\widetilde{\omega}_m(f, h)$ (см. ([1]), стр. 260). Применяя эту оценку к неравенству (4), мы приходим к оценке (2).

Отметим, что для функции $f(x)$, финитной в произвольной строго внутренней подобласти g' области g, при $\theta \geqslant 2$ с помощью тех же рассуждений можно убедиться в справедливости обратного неравенства

$$\|f\|_{B_{2,\theta}^{\alpha}} \leqslant c(g') \left[\sum_{m=0}^{\infty} (2^{m\alpha}\rho_{2^m}(f))^{\theta}\right]^{1/\theta}.$$

В случае, когда область g является N-мерным кубом со стороной 2π, а $\{u_n(x)\}$ — кратной тригонометрической системой, этот результат, как и оценка (2), является известным (см. ([1]), теорему 8.10.1).

1°. Приведем некоторые следствия из теоремы 1. Сформулируем ее вначале для случая $\theta = \infty$ и $\theta = 2$.

Следствие 1. *Пусть* $f(x) \in \mathring{H}_2^{\alpha}(g)$, $\alpha > 0$. *Тогда для любого* $\mu > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{\mu < \sqrt{\lambda_n} \leqslant 2\mu} f_n^2 \lambda_n^{\alpha} \leqslant c\|f\|_{H_2^{\alpha}}^2. \tag{6}$$

Следствие 2. *Для любой функции* $f(x) \in L_2^{\alpha}(g)$ *при* $\alpha \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n^{\alpha} \leqslant c\|f\|_{L_2^{\alpha}}^2.$$

При $\theta = 1$ из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* p *удовлетворяет условию* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Тогда ряд Фурье произвольной функции* $f(x) \in \mathring{B}_{p,1}^{N/p}$ *сходится равномерно и абсолютно в любой строго внутренней подобласти* g' *области* g.

Для доказательства воспользуемся неравенством Коши — Буняковского и определением (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n u_n(x)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{2^m}(f) \left[\sum_{\sqrt{\lambda_n} < 2^m} u_n^2(x)\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Заметим далее, что равномерно по x, принадлежащему g', справедлива оценка

$$\sum_{\sqrt{\lambda_n}<\mu} u_n^2(x) \leqslant c\mu^N.$$

Остается подставить эту оценку в неравенство (7) и применить оценку (2) при $\theta = 1$.

Следствие. *Ряд Фурье произвольной функции $f(x) \in \mathring{W}_1^N(g)$ сходится равномерно и абсолютно в любой строго внутренней подобласти g' области g.*

Заметим, что теорема 2 является окончательной. Для произвольной ф.с.ф. оператора Лапласа в любой области g и любой внутренней точки $x_0 \in g$ существует финитная функция $f(x)$, принадлежащая классу $B_{p,\theta}^{N/p}$ при любом $p \geqslant 1$ и любом $\theta > 1$, ряд Фурье которой расходится в точке x_0. Кроме того, при тех же условиях можно указать финитную функцию $f(x)$, при любом $p > 2$ принадлежащую классу $B_{p,1}^{N/p}$, ряд Фурье которой абсолютно расходится в точке x_0.

2^0. Рассмотрим подробнее случай $N = 2$, когда g является двумерной областью, звездной относительно некоторого круга. Из результатов работы ([2]) вытекает, что для локализации частичных сумм ряда Фурье произвольной функции $f(x) \in L_2(g)$, достаточно равномерной ограниченности по μ величины, стоящей в левой части неравенства (6), при $\alpha = 1/2$. Таким образом мы получаем, что достаточным условием локализации является принадлежность функции $f(x)$ классу $\mathring{H}_2^{1/2}(g)$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной в области g, если эту область можно разбить с помощью спрямляемых кривых на конечное число областей g_k, в каждой из которых $f(x)$ является равномерно непрерывной. Если, кроме того, $f(x)$ в каждой из областей g_k имеет равномерно непрерывные производные первого порядка, то функцию $f(x)$ будем называть кусочно-гладкой. Нетрудно показать, что каждая кусочно-гладкая функция принадлежит классу $\mathring{H}_2^{1/2}(g)$. Таким образом, для локализации частичных сумм ряда Фурье в случае $N = 2$ нет необходимости требовать от функции $f(x)$ удовлетворения каким-либо краевым условиям. Заметим, что в случае $N > 2$ даже для функции, тождественно равной единице в N-мерном шаре, ряд Фурье по собственным функциям первой краевой задачи расходится в центре шара.

Можно также показать, что любая функция, принадлежащая в двумерной области g, звездной относительно некоторого круга, пространству $W_2^1(g)$, принадлежит также и классу $\mathring{H}_2^{1/2}(g)$. Рассмотрим в связи с этим в области g с границей Γ задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad x \in g, \quad u|_\Gamma = \varphi \tag{8}$$

с произвольной допустимой функцией φ.

Так как обобщенное решение $u(x) \in W_2^1(g)$, то $u(x)$ принадлежит классу $\mathring{H}_2^{1/2}(g)$ и справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть g — *произвольная двумерная область, звездная относительно некоторого круга. Тогда для любой функции $u(x)$, являющейся обобщенным решением задачи Дирихле в области g, ряд Фурье $u(x)$ по произвольной ф.с.ф. оператора Лапласа сходится равномерно в любой строго внутренней подобласти g' области g.*

Автор приносит глубокую благодарность проф. В. А. Ильину за внимание, проявленное им к этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. [2] В. А. Ильин, Ш. А. Алимов, ДАН, 193, № 2 (1970).