Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 513.736.3 МАТЕМАТИКА

И. С. БРАНДТ

ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНОЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 III 1970)

1°. В работе (1) Н. В. Ефимовым была установлена следующая теорема: Пусть в трехмерном эвклидовом пространстве имеется полная (в смысле внутренней метрики) поверхность Σ с отрицательной гауссовой кривизной K. Пусть $k=\sqrt{-K}$ и $q=\sup\limits_{\Sigma}\left|\operatorname{grad}\frac{1}{k}\right|$. Тогда $q>1/\sqrt{3}$.

Позднее, пользуясь другим методом, Н. В. Ефимов доказал, что на самом деле $q=\infty$ (см. (2)).

Результаты, изложенные ниже, являются в некотором смысле обобщением этих фактов на случай риманова пространства.

Пусть в трехмерном римановом пространстве R неположительной римановой кривизны имеется полная (в смысле внутренней метрики) поверхность Σ, отрицательной внешней кривизны K_e.

Теорема 1. *При изложенных выше условиях*

$$\sup_{\Sigma}\left\{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{k}\right|+\frac{\Lambda-\lambda}{2k^2}\right\}=q>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Здесь $k=\sqrt{-K_e}$; Λ и λ — наибольшая и наименьшая риманова кривизна пространства R в точке поверхности, где вычислена кривизна K_e.

Теорема 2. *Существуют риманово пространство R и поверхность Σ, удовлетворяющие условиям теоремы 1, для которых $q=4{,}5$.*

2°. Пусть в трехмерном римановом пространстве R с координатами z^1, z^2, z^3 задана поверхность Σ: $z^1=z^1(x,y)$, $z^2=z^2(x,y)$, $z^3=z^3(x,y)$. Две основные формы поверхности мы запишем в виде:

$$\mathrm{I}=E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2,$$
$$\mathrm{II}=L\,dx^2+2M\,dx\,dy+N\,dy^2=-(dz\,dn).$$

Здесь через $n=(n^1,n^2,n^3)$ обозначен вектор единичной нормали к поверхности. В дальнейшем нам также понадобятся векторы $\xi_1(\xi_1^1,\xi_1^2,\xi_1^3)$ и $\xi_2(\xi_2^1,\xi_2^2,\xi_2^3)$; $\xi_1^i=\partial z^i/\partial x$, $\xi_2^i=\partial z^i/\partial y$. Обозначим через $\tau_1(\tau_1^1,\tau_1^2,\tau_1^3)$ и $\tau_2(\tau_2^1,\tau_2^2,\tau_2^3)$ нормированные касательные векторы: $\tau_1=\xi_1/|\xi_1|$, $\tau_2=\xi_2/|\xi_2|$.

Через $\tau_1^*(\tau_1^{*1},\tau_1^{*2},\tau_1^{*3})$ будем обозначать вектор τ_1, повернутый к касательной плоскости к поверхности на угол $\pi/2$ в направлении от τ_1 к τ_2. Аналогично введем вектор $\tau_2^*(\tau_2^{*1},\tau_2^{*2},\tau_2^{*3})$. Нами будут также употребляться в дальнейшем приведенные коэффициенты второй квадратичной формы:

$$\lambda=L/\sqrt{EG-F^2},\quad \mu=M/\sqrt{EG-F^2},\quad \nu=N/\sqrt{EG-F^2}.$$

Внешнюю кривизну поверхности мы определим так:

$$K_e=\lambda\nu-\mu^2.$$

Через K_i мы будем обозначать внутреннюю кривизну поверхности, через K — кривизну пространства в направлении касательной плоскости к поверхности. Компоненты тензора кривизны пространства будем обозначать через R_{lkpj}.

3°. Основные уравнения теории поверхностей (см., например, [3]) можно переписать в виде

$$K_i = K + K_e,$$
$$\lambda_y' - \mu_x' = a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + C_1\sqrt{E},$$
$$\nu_x' - \mu_y' = a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu - C_2\sqrt{G}.$$

Здесь

$$C_1 = R_{lkpj}\xi_1^l\xi_2^k\tau_1^p n^j / \sqrt{EG - F^2}; \quad C_2 = R_{lkpj}\xi_1^l\xi_2^k\tau_2^p n^j / \sqrt{EG - F^2};$$

a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — некоторые коэффициенты, зависящие от внутренней метрики поверхности. Коэффициенты b_1 и b_2 вычисляются по формулам

$$b_1 = 2\Gamma_{12}^2, \quad b_2 = 2\Gamma_{12}^1,$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля поверхности Σ.

Предположим, что на поверхности введены асимптотические координаты (u, v). Первой квадратичной форме поверхности мы придадим вид

$$ds^2 = e^2du^2 + 2eg\cos\omega\, du\, dv + g^2dv^2.$$

Из основных уравнений, после выкладок похожих на те, что сделаны в [1], получаются уравнения

$$\begin{aligned} \partial \ln(ek) / \partial s_2 &= \sin\omega\,(\partial Q / \partial s_1^* + C_1^* / 2k), \\ \partial \ln(gk) / \partial s_1 &= -\sin\omega\,(\partial Q / \partial s_2^* - C_2^* / 2k). \end{aligned} \tag{I}$$

Здесь $Q = {}^1/_2 \ln k$, $\partial / \partial s_i$ — оператор дифференцирования в направлении вектора τ_i, $\partial / \partial s_i^*$ — оператор дифференцирования в направлении вектора τ_i^*, $C_1^* = R_{lkpj}\xi_1^l\xi_2^k\tau_1^{*p}n^j / eg\sin\omega$, $C_2^* = R_{lkpj}\xi_1^l\xi_2^k\tau_2^{*p}n^j / eg\sin\omega$.

Обобщаются также формулы для геодезических кривизн в координатах линий:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= -\partial\omega / \partial s_1 + \sin\omega\,(\partial Q / \partial s_2 - C_2 / 2k), \\ \varkappa_2 &= \partial\omega / \partial s_2 - \sin\omega\,(\partial Q / \partial s_1 + C_1 / 2k), \end{aligned} \tag{II}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — геодезические кривизны линий первого и второго семейств. Уравнения (I) и (II) в эвклидовом пространстве впервые были получены Н. В. Ефимовым и Э. Г. Позняком в работе [4].

Имеет место следующая лемма, которую мы приведем без доказательства.

Лемма. $|C_i| \leqslant (\Lambda - \lambda) / 2$, $|C_i^*| \leqslant (\Lambda - \lambda) / 2$.

Из этой леммы и из уравнений (I) и (II) следует, что поверхности, для которых

$$\sup_\Sigma \left\{ \left| \operatorname{grad} \frac{1}{k} \right| + \frac{\Lambda - \lambda}{2k^2} \right\} = q, \tag{*}$$

имеют свойства, аналогичные свойствам поверхностей с q-метрикой в эвклидовом пространстве.

В частности, обобщается оценка для разности длин сторон сетевого четырехугольника, принадлежащая Э. Р. Розендорну (см. [5]).

Доказательство теоремы 1 идет после этого аналогично доказательству теоремы 5 из [1].

4°. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим риманово пространство с метрикой

$$ds^2 = \left(\frac{1 + u^2}{2y^2}\right) dx^2 - \frac{2u}{y^2}\, dx\, dy + \left(\frac{1 + 9u^2}{2y^2}\right) dy^2 + du^2,$$
$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < u < +\infty, \quad y > 0.$$

Можно показать, что поверхность $\Sigma\{u=0\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и для нее $q=4{,}5$.

5°. Теорема 1, доказанная выше, действительно является обобщением теоремы 5 из ([1]), так как в случае пространства постоянной кривизны условие (*) совпадает с определением q-метрики. Однако выход в риманово пространство ослабляет, в некотором смысле, теорему о q-метриках, так как внешняя кривизна в условии (*) уже не будет определяться внутренней метрикой.

Из теоремы 1 можно вывести несколько следствий. Например, частным случаем теоремы 1 является такая теорема: если в римановом пространстве R неположительной кривизны имеется полная в смысле внутренней метрики поверхность с внешней кривизной $K_e=-1$, то найдется точка на поверхности, где $\Lambda-\lambda>1$. Из теоремы 1 и приведенного в 4° примера следует, что метод доказательства теоремы 2 из ([2]) существенно в большей степени использует эвклидовость пространства, чем метод доказательства теоремы 5 из ([1]).

Из выведенных уравнений можно сделать также несколько заключений. Так, например, при $q<\sqrt{2}$ поверхность, как и в эвклидовом случае, имеет регулярную сеть асимптотических линий.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
4 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Ефимов, УМН, 21, в. 5 (131), № 3 (1966). [2] Н. В. Ефимов, Матем. сборн., 76, в. 4, 499 (1968). [3] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», 1967. [4] Н. В. Ефимов, Э. Г. Позняк, ДАН, 137, № 1, 25 (1961). [5] Э. Р. Розендорн, ДАН, 149, № 4 (1963).