Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 518.1 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Член-корреспондент АН СССР Л. А. ВАЙНШТЕЙН, М. Г. БЕЛКИНА

МЕТОД ДВОЙНОЙ РЕДУКЦИИ И БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Численное решение многих граничных задач математической физики может быть сведено к решению бесконечной системы линейных уравнений

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_{rs}X_s = C_r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где X_s — коэффициенты разложения неизвестной функции

$$\Psi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} X_s\psi_s(x) \tag{2}$$

по полной системе функций $\psi_s(x)$. Неизвестная функция $\Psi(x)$ может быть например, плотностью тока на идеально проводящей поверхности, составляющей поля на некоторой вспомогательной поверхности, которая разделяет две области простой формы, и т. д.

Систему (1) обычно решают методом редукции, т. е. сводят ее к конечной системе

$$\sum_{s=0}^{S-1} A_{rs}X_s = C_r, \quad r = 0, 1, \ldots, S-1, \tag{1'}$$

и, следовательно, ряд (2) заменяют конечной суммой

$$\Psi(x) = \sum_{s=0}^{S-1} X_s\psi_s(x), \tag{2'}$$

где S — достаточно большое число. Однако обычный метод редукции становится малоэффективным, если функция $\Psi(x)$ имеет особенности, отсутствующие у функций $\psi_s(x)$; эти особенности передаются замедленной сходимостью ряда (2), и, заменяя его конечной суммой (2′), мы теряем эти особенности и не получаем из системы (1′) хороших результатов даже для начальных коэффициентов $X_0, X_1, \ldots$

Так, например, если представить плотность тока на идеально проводящем полом цилиндре конечной длины в виде тригонометрического ряда и решать систему для коэффициентов этого ряда ([1]) методом редукции, то сходимость оказывается очень медленной. Для ускорения сходимости пришлось прибегнуть к новой формулировке задачи — разложению плотности тока по функциям ψ_s, имеющим на концах цилиндра ту же особенность, что и сама плотность ([2]). В теории дифракции плоской волны на бесконечной периодической решетке естественным является разложение поля по плоским волнам (собственным и несобственным). Однако для решетки из бесконечно тонких лент такое разложение вблизи решетки сходится медленно, и получаемую для коэффициентов этого разложения бесконечную систему (1) методом редукции решать практически нельзя (ср. ([3])). Это обстоятельство вызвало появление работ Аграновича, Марченко и Шестопалова

([4]) и Малина ([5]), в которых дана иная формулировка задачи — система (1) преобразуется в другую, которая и решается численно.

Оказывается, однако, что в этих и других случаях в переформулировке задачи нет необходимости, и можно решать систему (1), применяя метод двойной редукции, к изложению которого мы и переходим. Дело в том, что особенности функции (2) в граничных задачах возникают из-за того, что область пространства, в которой мы исследуем поле, ограничена поверхностью с краями и угловыми точками, особенности поля вблизи которых известны a priori, поэтому известны как все особенности функции $\Psi(x)$, так и характер связанного с ними асимптотического ряда, определяющего поведение коэффициентов X_s при больших s. Он может, например, иметь вид

$$X_s = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho_j}{s^{\gamma+j}}, \tag{3}$$

где коэффициенты $\rho_0, \rho_1, \ldots$ неизвестны, а показатель $\gamma > 0$ известен заранее.

Метод двойной редукции заключается в том, что первые S коэффициентов X_s (при $s = 0, 1, \ldots, S-1$) ряда (2) учитываются точно, как и в обычном методе редукции, но остальные коэффициенты не полагаются равными нулю, а заменяются асимптотическим выражением

$$X_s = \sum_{j=0}^{J-1} \frac{\rho_j}{s^{\gamma+j}}, \tag{4}$$

т. е. первыми J членами ряда (3). Таким образом, мы учитываем точно S коэффициентов X_s ряда (2) и J коэффициентов ρ_j ряда (3), т. е. производим как бы двойную редукцию. Система (1) принимает тогда вид

$$\sum_{s=0}^{S-1} A_{rs} X_s + \sum_{j=0}^{J-1} B_{rj}\rho_j = C_r, \quad r = 0, 1, \ldots, S+J-1, \tag{5}$$

где элементы добавочной матрицы

$$B_{rj} = \sum_{s=S}^{\infty} \frac{A_{rs}}{s^{\gamma+j}}, \quad r = 0, 1, \ldots, S+J-1, \quad j = 0, 1, \ldots, J-1, \tag{6}$$

представляются медленно сходящимися рядами; однако все члены этих рядов известны, и поэтому их можно вычислить, улучшая сходимость тем или иным способом. Мы взяли конечное число коэффициентов X_s и ρ_j, и поэтому можем удовлетворить лишь конечному числу уравнений (1). Выбор первых $S+J$ уравнений является естественным, хотя и произвольным.

Чтобы получить представление об эффективности метода двойной редукции, мы применили этот метод к задаче, допускающей строгое решение ([3]). Пусть функция $\Phi = \Phi(x, z)$ удовлетворяет двухмерному уравнению Гельмгольца при $z > 0$ и граничным условиям

$$\begin{aligned} &\partial\Phi / \partial z = 0 \quad \text{при } (2m-1)d < x < 2md, \\ &\qquad\qquad\qquad z = 0,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ &\Phi = 0 \text{ при } 2md < x < (2m+1)d, \end{aligned} \tag{7}$$

Если на плоскость $z = 0$ нормально падает плоская волна, то функция Φ в полупространстве $z \geqslant 0$ имеет вид

$$\Phi(x, z) = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{ik(z\cos\varphi_n + x\sin\varphi_n)}. \tag{8}$$

Действительно, условия (7) соответствуют периодической структуре (решетке) с периодом $2d$ по оси x; углы φ_n определяются соотношениями

$$\sin\varphi_n = n/2q, \quad q = kd/2\pi = d/\lambda,$$
$$\cos\varphi_n = \sqrt{1-\left(\frac{n}{2q}\right)^2} = i\frac{|n|}{2q}\sqrt{1-\left(\frac{2q}{n}\right)^2}, \tag{9}$$

а комплексные коэффициенты R_n неизвестны; из соображений симметрии можно показать, что $R_{-n} = (-1)^n R_n$.

Таблица 1

q	$\lvert R_0 \rvert$ по данному методу	$\lvert R_0 \rvert$ по точным формулам	$\lvert R_1 \rvert$ по данному методу	$\lvert R_1 \rvert$ по точным формулам
0,01	1,000000003	1	0,02000123	—
0,25	0,99999999	1	0,52144040	—
0,5	1,0000003	1	1,4142137	1,4142136
0,75	0,1458979	0,1458980	0,81027219	0,81027227
1,00	0,0717961	0,0717968	0,75787542	0,75787476
1,5	0,2017532	0,2017659	0,65175639	0,65175542

Для коэффициентов R_n можно написать систему уравнений (см. [3], формула (55.04)), которая легко преобразуется к виду (1), где

$$X_s = R_{2s+1}, \qquad C_r = -\delta_{0r},$$
$$A_{rs} = \frac{i}{\pi}(\cos\varphi_{2s+1} + \cos\varphi_{2r})\left(\frac{1}{2s+1-2r} + \frac{1}{2s+1+2r}\right), \tag{10}$$

а четные коэффициенты R_{2m} определяются по формуле

$$R_{2m} = -\delta_{0m} - \frac{2i}{\pi}\left[\sum_{s=0}^{S-1}\left(\frac{1}{2s+1-2m} + \frac{1}{2s+1+2m}\right)R_{2s+1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{J-1}\rho_j\sum_{s=S}^{\infty}\left(\frac{1}{2s+1-2m} + \frac{1}{2s+1+2m}\right)\frac{1}{s^{\gamma+j}}\right].$$

Показатель γ можно определить следующим образом. Как видно из формул (8) и (9), коэффициенты R_n суть коэффициенты разложения функции $\Phi(x, 0) - 1$ в ряд по функциям $e^{i\pi nx/d}$, т. е. в комплексный ряд Фурье. Сама же функция $\Phi(x, 0)$ может быть представлена в виде

$$\Phi(x, 0) = f(x)p(x), \tag{11}$$

где $f(x)$ — аналитическая функция с периодом $2d$, а

$$p(x) = \sqrt{(2md - x)[(2m-1)d + x]} \quad \text{при } (2m-1)d < x < 2md,$$
$$p(x) = 0 \quad \text{при } 2md < x < (2m+1)d \tag{12}$$

есть «весовая функция», учитывающая все особенности $\Phi(x, 0)$. Поэтому

$$R_n = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{i\pi n\xi}\bar{f}(\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}\,d\xi = \frac{i}{2\pi n}\int_0^1 e^{i\pi n\xi}\frac{d}{d\xi}[\bar{f}(\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}]\,d\xi,$$

где $\bar{f}(\xi) = f(-\xi d)$, а $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ При больших положительных n последний интеграл можно преобразовать в сумме интегралов от 0 до $i\sigma$, от $i\sigma$ до $1 + i\sigma$ и от $1 + i\sigma$ до 1 ($\sigma > 0$), и мы получим

$$R_n = \frac{1}{2\pi n}\left\{\int_0^\sigma e^{-\pi nt}[f_0(t) - (-1)^n f_1(t)]\frac{dt}{\sqrt{t}} + O(e^{-\pi\sigma n})\right\},$$

где f_0 и f_1 — функции, разлагающиеся при малых t в степенные ряды по t. Отсюда при $n = 2s + 1$ получается ряд (3) с показателем $\gamma = {}^3/_2$. Аналогичный ряд, но с другими коэффициентами ρ_j получается при $n = 2s$.

При вычислениях мы брали $S = 6$, $J = 4$ и получили (на машине Урал-2) результаты, приведенные в табл. 1. Из таблицы видно, что эти значения S и J дают 5—6 верных десятичных знаков при $q \geqslant 1$ и значительно бо́льшую точность при малых q. Очевидно, что для получения той же точности при бо́льших q надо брать больший порядок системы.

Таблица 2

S		$\lvert R_0 \rvert$	$\lvert R_1 \rvert$
6	4	0,1458979	0,81027219
8	2	0,1458386	0,81026301
9	1	0,1457200	0,81016116
Точные значения		0,14589803	0,81027227

При $q = 0{,}75$ было произведено исследование других вариантов метода (см. табл. 2). Это исследование показывает, что уменьшение J (числа асимптотических коэффициентов) при том же числе уравнений $S + J$ снижает точность метода.

Как показывает данный пример, метод двойной редукции весьма эффективен и вместе с тем не требует громоздких выкладок и преобразований; некоторые трудности доставляет только вычисление рядов (6), которое мы производили с помощью непосредственного суммирования начального отрезка ряда и применения формулы Эйлера — Маклорена к его остатку. Вместе с тем этот метод является достаточно общим и, в частности, может быть распространен на бесконечные системы, в которые входят неизвестные коэффициенты разного типа, с различными асимптотическими разложениями.

Когда эта работа уже подходила к концу, мы познакомились с американской статьей ([6]), в которой развиты родственные идеи. В силу того, что в статье ([6]) система линейных уравнений для коэффициентов разложения формулируется путем постановки граничных условий в конечном числе точек, вывод основных соотношений становится более громоздким, а результаты при гораздо большем числе уравнений (51) получаются менее точными (там решалась по существу та же задача). Нам представляется, что более целесообразно исходить из системы (1), полученной из граничных условий на всей границе.

Мы благодарим Н. И. Лесик за интерес к нашей работе.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
26 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Л. Капица, В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 29, № 10, 1188 (1959). [2] Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 37, № 7, 1181 (1967). [3] Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, М., 1966, §§ 52 и 55. [4] Э. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962). [5] В. В. Малин, Радиотехника и электроника, 8, № 2, 211 (1963). [6] A. R. Neureuther, K. Zaki, Radio Sci., 3, № 12, 1158 (1968).