Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 1

УДК 517.948:513.88:518

МАТЕМАТИКА

Б. А. ВЕРТГЕЙМ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КАК УПРАВЛЯЕМЫЙ ПРОЦЕСС

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 4 II 1970)

Для решения нелинейных операторных уравнений в последнее время было предложено и изучено много приближенных методов, бо́льшая часть которых вызвана основополагающими работами Л. В. Канторовича (см. ([1–4], [14]), где имеются дальнейшие ссылки).

Обилие методов ставит на очередь задачу об оптимальном выборе между ними,— в зависимости, конечно, от конкретной ситуации,— а известное единообразие этих методов создает удобные предпосылки для их совместного рассмотрения. Настоящая заметка посвящена изучению некоторых сторон этого вопроса, являющегося частью общей задачи оптимального поиска — задачи, как известно, чрезвычайно трудной и в смысле ее постановки, и с точки зрения ее решения (см. по этому поводу, например, ([5])).

1. Рассмотрим некоторый класс $\mathfrak{A}$ отображений $P\colon \Omega\to Y$, $\Omega\subset X$, где X и Y — пространства Банаха, Ω — заданное подмножество, и соответствующий класс операторных уравнений

$$P(x)=0,\quad P\in\mathfrak{A}. \tag{1}$$

Под методом приближений мы будем для простоты в этом пункте понимать отображение $\Phi\colon \mathfrak{A}\times\Omega\to\Omega$, которое каждому $P\in\mathfrak{A}$ и $x\in\Omega$ ставит в соответствие $\Phi(P, x)$ (если x — начальное приближение к решению уравнения (1), то $\Phi(P, x)$ — следующее приближение). В общем случае приведенная формулировка нуждается, очевидно, в уточнении, так как, быть может, не каждый $x\in\Omega$ пригоден в качестве исходного приближения; это связано с тем, что обычно отображение Φ получается как композиция нескольких операций, и встает задача эффективного описания области определения Φ.

Пусть выбрано семейство (Φ_i), $i\in I$ приближенных методов (здесь I — множество индексов) и пусть задано некоторое отображение $u\colon N\to I$ натурального ряда $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$ в множестве I. Построим последовательность $x_n\equiv x_n(u)$:

$$x_{n+1}=\Phi_{u(n)}(P, x_n),\quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Процесс (2) осуществляется чередованием методов из семейства (Φ_i) с помощью управления u. Пусть известна цена $c_i(n, u)$ одной итерации метода Φ_i на шаге n при управлении u; обычно c_i зависит лишь от значений u на множестве $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Естественно ставятся следующие задачи.

Задача А. Даны: конкретное уравнение (1), его решение x^*, приближение x_0, число $Q>0$, некоторый класс K управлений u. Найти число итераций n (если оно не известно из описания класса K) и управление $u\in K$ так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_{u(k)}(k, u)\leqslant Q,\quad \|x_n(u)-x^*\|\to\min. \tag{3}$$

З а д а ч а Б. В условиях задачи А для заданного дополнительно числа $\Delta > 0$ найти n и $u \in K$ так, чтобы

$$\|x_n(u) - x^*\| \leqslant \Delta, \quad \sum_{k=0}^{n-1} c_{u(k)}(k, u) \to \min. \tag{4}$$

Так как решение этих задач для конкретно заданного P является, как правило, более трудным делом, чем отыскание корня x^*, то особенно интересен вопрос об устойчивости характеристик оптимального управления u при изменении оператора P. С другой стороны, возможны видоизменения задач, в которых речь идет о всем классе $\mathfrak{A}$ и используются минимаксные критерии (см. ([5])).

2. Рассмотрим следующий частный случай задачи А, полезный для ее решения в общей ситуации. Пусть $I = \{1, 2\}$, Φ_1 — основной, Φ_2 — модифицированный процессы Ньютона — Канторовича. Для заданного управления u множество $u^{-1}\{1\} = \{0, n_1, n_2, \ldots\}$ составлено из номеров, для которых вычисляется $P'(x_{n_i})$; условимся, что $n_1 < n_2 < \ldots$ При этом для номеров k таких, что $n_i < k < n_{i+1}$, применяется модифицированный процесс, использующий $P'(x_{n_i})$. Таким образом,

$$x_{k+1} = x_k - [P'(x_{n_i})]^{-1} P(x_k), \quad n_i \leqslant k < n_{i+1}, \tag{5}$$

(см. ([1, 9, 11])). Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_0$ операторов P и уравнений вида

$$P(x) \equiv a - x + \lambda\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0; \tag{6}$$

здесь отображение φ: $X \to Y$ имеет достаточное число производных в окрестности точки $a \in X$; λ: $Y \to X$ — непрерывный линейный оператор с малой нормой; a и λ — параметры. Можно показать, что существует окрестность S точки a такая, что при достаточно малых $\|\lambda\|$ уравнение (6) имеет единственное в S решение $x^* \equiv x^*(\lambda) \in S$, к которому сходятся приближения процесса Ньютона — Канторовича при любом управлении u и любой начальной точке $x_0' \in S$.

З а д а ч а A_0. Пусть класс K_0 допустимых управлений для решения уравнения (6) способом (5) состоит из таких управлений, относящихся к n-шаговому процессу, при которых точно l раз применяется основной процесс Ньютона, т. е. $u^{-1}\{1\} = \{0, n_1, n_2, \ldots, n_l\}$, l и n — заданы, $n > l > 1$; число Q в (3) достаточно велико. Требуется найти номера n_i из условия минимума $\|x_n(u) - x^*\|$.

Сформулируем сначала результат, относящийся к случаю $X = Y = R$.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены следующие условия*: $\varphi'(a) \neq 0$,

$$(\forall x)\varphi''(x) \neq 0, \quad B^2|\varphi(a)\varphi''(a)| < 1 \quad (B\varphi'(a) = 1).$$

Тогда существует число δ, зависящее лишь от φ, a, λ такое, что при $|\lambda| < \delta$ оптимальное управление u задачи A_0 для уравнения (6) определяется соотношениями

$$n_i - n_{i-1} = \left[\frac{n+i-1}{l}\right] \quad (n \geqslant 2l, i = 1, 2, \ldots, l;\ n_0 = 0); \tag{7}$$

$$u^{-1}\{2\} = \{2l - n + 1, 2l - n + 3, \ldots, n - 3, n - 1\} \quad (n < 2l). \tag{8}$$

Доказательство проводится сначала для $l = 2$, $n = 3$ и $n = 4$. Применяя разложения в ряды (в частности, ряд Лагранжа), имеем

$$x^* - x_3(0, 1) = {}^1/_2\varphi^3\varphi''^2\lambda^5 + o(\lambda^5), \quad x^* - x_3(0, 2) = {}^1/_2\varphi^2\varphi'^2\varphi''\lambda^5 + o(\lambda^5), \tag{9}$$

$$x^* - x_4(0, 1) = {}^1/_2\varphi^4\varphi''^3\lambda^7 + o(\lambda^7), \quad x^* - x_4(0, 2) = {}^1/_2\varphi^3\varphi'^3\varphi''^2\lambda^8 + o(\lambda^8).$$

Здесь $\varphi \equiv \varphi(a)$, $\varphi^{(i)} \equiv \varphi^{(i)}(a)$; в обозначениях, например, $x_3(0, 1)$ указаны номера основного процесса. Далее, при $l = 2$, $n \geqslant 4$, $2n_1 < n$ мы показываем, что управление u такое, что $u^{-1}\{1\} = \{0, n_1 - 1\}$, лучше управлес помощью повторного применения доказанных для $l = 2$ свойств.

Теорема 1 выражает интуитивно очевидную тенденцию применять сначала основной, а потом — модифицированный процессы, причем эта тенденция осуществляется не очевидным образом, поскольку, например, при $n \geqslant 2l$ итерации обоих способов вначале чередуются. Связанноое позволяет уточнить одно замечание А. М. Островского (см. ([3])) о модифицированном процессе, который в этой книге поставлен под сомнение из-за сравнительно медленной сходимости. Интересно отметить, что в ([3]) рассмотрен с другой точки зрения, чем здесь, чередующийся способ, для которого $u^{-1}\{1\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, и показано, что для приближений $y_n \equiv x_{2n}$ это способ третьего порядка. Подобный факт для функциональных уравнений получен в ([12]), где, однако, даны слишком стеснительные достаточные условия сходимости. Отметим, что теоремы ([12]), а также ([11]) допускают обобщения для класса уравнений, изученных в ([8]), т. е. на случай, когда P' удовлетворяет условию Гёльдера.

3. Переходя к случаю функциональных уравнений, заметим, что метод малого параметра приводит здесь к результатам, подобным теореме 1, при некоторых дополнительных предположениях, например $\varphi''(h_1, h_2) = 0 \Rightarrow h_1 = h_2 = 0$, и при тривиальности ядер операторов φ' и λ. При вычислениях мы пользуемся некоторым аналогом ряда Лагранжа для функционального случая. Приведем еще результат для задачи типа A_0, относящийся к уравнениям вида (1).

Теорема 2. *Пусть оператор P в уравнении* (1) — *аналитический*, $P(x^*) = 0$, $\exists \Gamma^* = [P'(x^*)]^{-1}$, $\|\Gamma^*\| < \infty$, $[P'']^{-1}\{0\} = (0, 0)$. *Тогда существует такая окрестность $U(x^*)$ точки x^*, что для задачи A_0 при любом выборе начального приближения $x_0 \in U(x^*)$ оптимальное управление определяется соотношениями* (7) *или* (8) (*в зависимости от знака числа* $n - 2l$).

Условие аналитичности можно ослабить. Подобные же результаты можно получить и для стыковки других методов, таких как способы Чебышева, секущих, касательных гипербол и парабол ([2–7, 13, 14]), а также для методов минимизации функционалов.

На основе теорем 1 и 2 можно решать задачи А и Б. Один из подходов, например, к задаче А состоит в следующем: составляем таблицу функции $\psi(n, l) = |x^* - x_n|$ в некотором диапазоне величин n и l для модельного уравнения (6) при $\varphi(x) = x^2$ (см. ([2])), где x_n получено в ходе процесса (5) при оптимальном управлении, охарактеризованном в теореме 1, а затем элементарными средствами решаем задачу минимизации $\psi(n, l)$ при условии, что (см. (3)) $c_1 l + c_2(n - l) \leqslant Q$; здесь цены c_1 и c_2 считаются не зависящими от n и u. Можно также оценивать близость x_n к x^* с помощью разложений типа (9) (не предполагая $\varphi(x) = x^2$). При этом определяется $\nu = \nu(n, l)$ — наименьший показатель степени λ, входящей с ненулевым коэффициентом в разложение $x^* - x_n$, и затем простым перебором решается задача максимизации $\nu(n, l)$ при условии $c_1 l + c_2(n - l) \leqslant Q$.

Для уравнений (1) в задаче Б оказывается применимым метод динамического программирования при анализе разностной системы, полученной одним из способов Л. В. Канторовича (прямым или мажорантным) для итерационного процесса (2). Переход к рекуррентной системе проанализирован в статье ([10]), в абстрактной схеме которой не предусмотрено переключение от одного приближенного метода к другому. На основе работ ([2, 10, 14]) может быть построена удобная для анализа таких переключений общая схема перехода к разностной системе, мажорирующей в некотором смысле процесс (2). Решение, например, задачи Б для этой мажорантной разностной системы в ряде типичных случаев дает приближенное решение задачи Б для исходного уравнения типа (1).

Новосибирский государственный университет

Поступило 15 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, УМН, 3, № 1, 89 (1948). [2] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. [3] А. М. Островский, Решение уравнений и систем, ИЛ, 1964. [4] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др., Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969. [5] Р. Беллман, С. Дрейфус, Прикладные задачи динамического программирования, «Наука», 1965. [6] Г. С. Салехов, ДАН, 82, № 4, 525 (1952) [7] М. И. Нечепуренко, УМН, 11, № 2, 163 (1954). [8] Б. А. Вертгейм, ДАН, 110, № 5, 719 (1956). [9] R. G. Bartle, Proc. Am. Math. Soc., 6, № 5, 827 (1955). [10] W. C. Rheinboldt, SIAM J. Numer. Analys., 5, № 1, 42 (1968). [11] J. E. Dennis jr, ibid., 6, № 3, 493 (1969). [12] W. E. Bosarge jr, P. Falb, JOTA. 4, № 3, 156 (1969). [13] H. Ehrmann. Arch. Rat. Mech. Anal., 4, № 1, 45 (1959). [14] Л. Коллатц, Функциональный анализ и вычислительная математика, М., 1969.