Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 517:54 *МАТЕМАТИКА*

В. Я. ГУТЛЯНСКИЙ

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 III 1970)

Пусть S — класс всех голоморфных однолистных в круге $E=\{z\colon |z|<1\}$ функций $w=f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$. В настоящей работе мы приводим решение задачи о параметрическом представлении класса S, устанавливая необходимые и достаточные условия принадлежности функции $w=f(z)$ классу S. Далее указываем на одно из приложений полученного результата к решению экстремальных задач теории однолистных функций и отмечаем связь между экстремальными проблемами в классе S и классе P всех голоморфных в круге E функций $w=h(z)$, $h(0)=1$, с положительной действительной частью.

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех неубывающих функций $\mu(x, y)$ двух переменных в области $x\geqslant 0$, $-\pi\leqslant y\leqslant\pi$, нормированных условиями $\mu(x,-\pi)=\mu(0,y)=0$, $\mu(x,\pi)=x$.

Непосредственно из определения класса $\mathfrak{M}$ следует, что при каждом фиксированном y, $-\pi\leqslant y\leqslant\pi$, функции $\mu(x, y)$ являются абсолютно непрерывными по x и, следовательно, почти при всех x, $x>0$, существует производная $\mu_x'(x, y)$, представляющая собой измеримую функцию переменного x при каждом фиксированном значении y, и неубывающую функцию переменного y, $-\pi\leqslant y\leqslant\pi$, при фиксированном x, $x>0$, нормированную условием $\mu_x'(x,-\pi)=0$, $\mu_x'(x,\pi)=1$.

Будем говорить, что последовательность $\mu_n(x, y)$ $(n=1, 2, \ldots)$ функций класса $\mathfrak{M}$ сходится к функции $\mu(x, y)\in\mathfrak{M}$, если во всех точках непрерывности функции $\mu(x, y)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu$.

Класс $\mathfrak{M}$ является компактным в себе относительно определенной выше сходимости последовательности функций из $\mathfrak{M}$.

Обозначим через Φ множество всех непрерывных функций $f(z, x, y)$ в области $E\times[0,\infty)\times[-\pi,\pi]$, аналитических по z в круге E и удовлетворяющих условию $|f(z,x,y)|\leqslant e^{-x}K(r)$, где $K(r)$ — постоянная, зависящая только от $r=|z|<1$.

Пусть $f(z,x,y)$ — произвольная функция класса Φ и μ_n — произвольная последовательность функций класса $\mathfrak{M}$, сходящаяся к функции $\mu(x,y)\in\mathfrak{M}$. Тогда:

1) существует равномерный относительно x, $0\leqslant x\leqslant A$, и $z\in E_r=\{z\colon |z|<r<1\}$ предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z,x,y)\,d\mu_n(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z,x,y)\,d\mu(x,y);$$

2) интегралы Стильтьеса

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z,x,y)\,d\mu(x,y),\quad \mu\in\mathfrak{M},$$

сходятся равномерно внутри E, равностепенно по классу $\mathfrak{M}$

Отсюда непосредственно следует существование равномерного внутри E предела

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} f(z,\ x,\ y)\,d\mu_n(x,\ y)=\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} f(z,\ x,\ y)\,d\mu(x,\ y).$$

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dx}=-w\int_{-\pi}^{\pi} g(w,\ y)\,d\mu_x'(x,\ y), \tag{1}$$

где $g(w,y)=(1+e^{iy}w)\,/\,(1-e^{iy}w)$, с начальным условием $w(x)\,|_{x=0}=$ $=z,\ z\in E$. Здесь функция $\mu(x,y)\in\mathfrak{M}$ и интеграл в (1) понимается в смысле Стильтьеса.

Решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию, будем обозначать через $f(z,x;\mu)$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $w=f(z)$ принадлежала классу S, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде*

$$f(z)=\lim_{x\to\infty} e^x f(z,\ x;\ \mu),\quad \mu\in\mathfrak{M}. \tag{2}$$

Наметим ход доказательства теоремы 1. Пусть $\mu(x,\ y)$ — произвольная функция класса $\mathfrak{M}$. Заменим уравнение (1) с начальным условием интегральным уравнением

$$w=z\exp\left\{-\int_0^x\int_{-\pi}^{\pi} g(w,\ y)\,d\mu(x,\ y)\right\}, \tag{3}$$

которое получается из (1) делением на w и интегрированием по x от 0 до x. Решая (3) методом последовательных приближений (ср., например, ([1]), стр. 96—97), находим, что решение $w=f(z,\ x;\ \mu)$ уравнения (3) регулярно в круге E и непрерывно в $0<x<\infty$, и, кроме того, $f(0,\ x;\ \mu)=0$, $f_z'(0,x;\mu)=e^{-x}$.

В силу легко доказываемой теоремы единственности решения уравнения (1) следует, что функция $f(z,\ x;\ \mu)$ однолистна в E при каждом фиксированном значении x из $[0,\ \infty)$. Остается установить существование равномерного по z внутри E предела (2). Для этого подставим $f(z,\ x;\ \mu)$ в уравнение (1) и перепишем его в виде

$$[e^x f(z,\ x;\ \mu)]_x'=e^x f(z,\ x;\ \mu)\ [1-g\,(f\,(z,\ x;\ \mu)\,y)], \tag{4}$$

заметив при этом, что функция, стоящая в правой части уравнения (4), принадлежит классу Φ *.

Интегрируя (4) по x от 0 до x и осуществляя предельный переход при x, стремящемся к бесконечности, приходим к заключению, что функция $f(z)$, полученная по формуле (2), принадлежит классу S.

Пусть теперь $f(z)$ — произвольная функция класса S. Покажем, что она может быть получена по формуле (2) с надлежащим образом выбранной функцией $\mu(x,\ y)$ из класса $\mathfrak{M}$. Для этого обозначим через $\mathfrak{M}'$ подкласс класса $\mathfrak{M}$ функций $\mu(x,\ y)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(w,\ y)\,d\mu_x'(x,\ y)=g\,(w,\ y\,(x)).$$

По теореме Левнера ([2]) (см. также ([1]), стр. 95) совокупность функций $f(z)$, полученных по формуле (2), когда $\mu(x,y)$ пробегает класс $\mathfrak{M}'$, образует подкласс S' класса S, всюду плотный в S относительно равномерной сходимости внутри круга E.

---

* Что следует из оценок $|f(z,x;\ \mu)|\leqslant|z|$, $|f(z,x;\ \mu)|\leqslant e^{-x}|z|\,/\,(1-|z|)^2$.

Выберем последовательность $f_n(z)$ функций класса S', равномерно внутри E сходящуюся к функции $f(z)$. Последовательности $f_n(z)$ соответствует последовательность $\mu_n(x, y)$ функций класса $\mathfrak{M}'$ такая, что $f_n(z) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x f(z, x; \mu_n)$.

Из $\mu_n(x, y)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в отмеченном ранее смысле к некоторой функции $\mu^*(x, y)$ класса $\mathfrak{M}$. Теперь, используя предложения п. 1, нетрудно показать, что сама функция $f(z)$ может быть получена по формуле (2) при $\mu = \mu^*$.

Из теоремы Рисса — Херглотца ([3]) следует, что функция

$$h(w, x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(w, y)\, d\mu_x'(x, y), \quad \mu \in \mathfrak{M}, \tag{5}$$

при каждом фиксированном x, $0 < x < \infty$, регулярна по w в круге $|w| < 1$ и имеет там положительную действительную часть. Следовательно, из известного дифференциального уравнения К. Левнера — П. П. Куфарева ([4]) и соотношения (2) можно получить все функции класса S.

3. Из тождества

$$dw / dx = -wh(w, x), \quad w = f(z, x; \mu), \tag{6}$$

где $h(w, x)$ вычисляется по формуле (5), с учетом (2), немедленно следуют необходимые для дальнейших рассуждений соотношения в классе S:

$$f(z) = z \exp\left\{\int\limits_0^{|z|} \frac{1 - F(w, \rho)}{\operatorname{Re} F(w, \rho)} \frac{d\rho}{\rho}\right\}, \tag{7}$$

$$f'(z) = \exp\left\{\int\limits_0^{|z|} \frac{1 - F(w, \rho) - wF_w'(w, \rho)}{\operatorname{Re} F(w, \rho)} \frac{d\rho}{\rho}\right\}. \tag{8}$$

Здесь $F(w, \rho) = h(f(z, x(\rho); \mu), x(\rho))$, $\rho = |f(z, x; \mu)|$*.

Теорема 2. *Пусть z_0 — фиксированная точка круга E и α, β, γ, δ — произвольные вещественные числа. Тогда для функционала*

$$I(f) = \alpha \ln \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| + \beta \arg \frac{f(z_0)}{z_0} + \gamma \ln |f'(z_0)| + \delta \arg f'(z_0), \tag{9}$$

определенного на классе S, имеют место точные оценки

$$\int\limits_0^{|z_0|} \varphi(\xi^-, \eta^-) \frac{d\rho}{\rho} \leqslant I(f) \leqslant \int\limits_0^{|z_0|} \varphi(\xi^+, \eta^+) \frac{d\rho}{\rho}, \tag{10}$$

где $(\xi^\pm, \eta^\pm)$ — точки окружности $\xi^2 - 2a(\rho)\xi + \eta^2 + 1 = 0$, $a = (1 + \rho^2)(1 - \rho^2)^{-1}$, в которых функция

$$\varphi(\xi, \eta) = a - \alpha - \gamma + (\alpha + \gamma) / \xi - \gamma\xi - \eta(\delta + (\beta + \delta) / \xi) \tag{11}$$

достигает своего максимального (минимального) значения.

Знак равенства в (10) реализуется, например, для функций $f(z)$ класса S, имеющих вид $f(z) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x f(z, x)$, где $w = f(z, x)$ — решение уравнения $w_x' = -wg(w, y^\pm(x))$, $w(0) = z$, причем

$$y^\pm(x) = \arcsin \eta^\pm [\xi^\pm (a^2 - 1)^{1/2}]^{-1} + \int\limits_0^x \eta^\pm dx - \arg z_0,$$

и $\rho = \rho(x)$ определяется из соотношения $(\ln \rho)_x' = -\xi^\pm$, $\rho(0) = |z_0|$.

* Из (6) следует, что $\rho(x)$ — монотонно убывающая функция, так как $(\ln \rho)_x' = -\operatorname{Re} h < 0$.

Из формул (7), (8) следует, что задача об оценке функционала $I(f)$ вида (9) на классе S эквивалентна нахождению экстремума действительного функционала $J(h) = \Psi(h(z), zh'(z)) / \operatorname{Re} h(z)$, $z = \rho e^{i\varphi} \in E$ и фиксировано, где $\Psi(\omega, w) = (\alpha + \gamma)(1 - \operatorname{Re}\omega) - (\beta + \delta)\operatorname{Im}\omega - \gamma \operatorname{Re} w - \delta \operatorname{Im} w$, на классе P (см. по этому вопросу работы [5, 6]) и последующего интегрирования результата по ρ от 0 до $|z_0|$. Подобная связь между экстремальными проблемами классов S и P имеет место и для других задач теории функций комплексного переменного.

Донецкий вычислительный центр
Академии наук УССР

Поступило
18 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966. [2] K. Löwner, Math. Ann., 89, 103 (1923). [3] G. Herglotz, Leipz. Ber., 63 (1911). [4] П. П. Куфарев, Матем. сборн., 13 (55), 1, 87 (1943). [5] В. А. Зморович, Укр. матем. журн., 17, № 4, 12 (1965). [6] И. А. Александров, В. Я. Гутлянский, ДАН, 165, № 5, 983 (1965).