Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 518.5 *МАТЕМАТИКА*

Е. А. ДИНИЦ

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ В СЕТИ СО СТЕПЕННОЙ ОЦЕНКОЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 III 1970)

Различные варианты постановки задачи о максимальном стационарном потоке в сети и ее многочисленные приложения даны в ([1]). Там же дан алгоритм, решающий задачу в случае, когда исходные данные — целые числа (или, что эквивалентно, соизмеримые). В общем случае этот алгоритм требует предварительного округления начальных данных, т. е. возможно лишь приближенное решение задачи. При этом оценка скорости сходимости алгоритма обратно пропорциональна относительной точности.

В данной работе предлагается алгоритм, точно решающий задачу в общем случае не более чем за Cn^2p (машинных) действий, где n — число узлов сети, p — число дуг в ней, C — константа, не зависящая от сети. При целочисленных данных этот алгоритм, как и алгоритм Форда и Фалкерсона, дает целочисленное решение с дополнительной оценкой числа действий C_1np плюс оценка последнего.

Постановка задачи. Сетью Г назовем ориентированный граф Г без кратных дуг с выделенными узлами s (источником) и t (стоком), для каждой дуги q которого задано неотрицательное число, ее пропускная способность $\rho(q)$. Пусть $V(\Gamma)$ — множество узлов графа Г, $Q(\Gamma)$ — множество его дуг.

Потоком f в сети Г назовем набор неотрицательных чисел, величин потока $f(q)$, заданных для всех дуг сети, такой что:

$$\text{I. } \operatorname{Div}(v) = \sum_{[v,x]\in Q(\Gamma)} f([v,x]) - \sum_{[y,v]\in Q(\Gamma)} f([y,v]) = 0 \quad \forall v \in V(\Gamma),\ v \neq s, t.$$

$$\text{II. } 0 \leqslant f(q) \leqslant \rho(q) \quad \forall q \in Q(\Gamma).$$

Величину $M = \operatorname{Div}(s)$ назовем мощностью потока f.

Требуется в данной сети Г найти поток максимальной мощности.

Мы можем считать, что в графе Г для каждой дуги $q = [a, b]$ существует противоположная дуга $\bar{q} = [b, a]$. Действительно, добавление недостающих дуг с нулевыми пропускными способностями не меняет задачи. Число дуг при этом увеличивается не более чем вдвое.

Построение алгоритма. Предлагаемый алгоритм, как и алгоритм Форда и Фалкерсона (([1]), гл. I, § 8), есть итеративный процесс, каждый шаг которого состоит в следующем: имея в сети Г поток f, находим некоторый путь L из s в t из класса увеличивающих путей (определение см. ниже); затем строим поток f': $M(f') > M(f)$, изменяя поток f в дугах пути L и в противоположных им дугах. Процесс может начинаться с любого потока (целочисленного при целочисленных данных), например, с нулевого, а заканчивается построением потока, не допускающего увеличивающих путей. В ([1]), гл. I, § 5, доказывается, что такой поток максимален.

Пусть в сети Г дан поток f. Введем величину $\delta(q) = \rho(q) - f(q) + f(\bar{q})$, определенную для каждой дуги Г. Ее можно считать пропускной способностью при наличии потока f пары дуг q, $\bar{q}$ в направлении дуги q. Назовем ориентированный путь L из s в t увеличивающим поток, если $\forall q \in L$ выполняется условие $\delta(q) > 0$. Это определение эквивалентно определению, используемому в ([1]).

Имея такой путь, можно построить поток f': $M(f') = M(f) + \Delta M$, где $\Delta M = \min\limits_{q \in L} \delta(q) > 0$. Для этого достаточно изменить поток в дугах пути L и в дугах, противоположных им, так, чтобы $\forall q \in L \quad [f'(q) - f(q)] + [f(\bar{q}) - f'(\bar{q})] = \Delta M$. Заметим, что при таком изменении $\delta'(q) = \delta(q) - \Delta M$ и $\delta'(\bar{q}) = \delta(\bar{q}) + \Delta M \ \forall q \in L$ (здесь и далее обозначения со штрихом соответствуют потоку f'). Для остальных дуг, очевидно, $\delta'(q) = \delta(q)$.

Рассмотрим теперь задачу нахождения пути, увеличивающего поток. Условимся считать длиной пути число его дуг, а расстоянием $l(a, b)$ между узлами a и b — длину кратчайшего пути между ними.

Основная идея алгоритма, обеспечивающая сходимость, состоит в том, чтобы на каждом шагу алгоритма находить к р а т ч а й ш и е увеличивающие пути.

Рассмотрим часть $\tilde{\Gamma}$ графа Γ, дуги которой определены неравенством $\delta(q) > 0$. Очевидно, условие $L \subset \tilde{\Gamma}$ необходимо и достаточно для того, чтобы ориентированный путь L из s в t был увеличивающим поток путем. Для нахождения кратчайших путей из s в t в графе $\tilde{\Gamma}$ используем следующий вспомогательный объект.

С п р а в о ч н а я. Назовем объединение всех кратчайших путей из s в t в графе $\tilde{\Gamma}$ справочной S графа $\tilde{\Gamma}$. Докажем несколько утверждений о ее структуре.

Пусть $l(s, t) = k$ в графе $\tilde{\Gamma}$.

1. $v \in V(S) \Leftrightarrow v \in V(\tilde{\Gamma}),\ l(s, v) + l(v, t) = k.$

Рассмотрим узел $v \in V(\tilde{\Gamma})$, обладающий указанным свойством. Он лежит на кратчайшем пути из s в t, являющемся объединением кратчайших путей из s в v и из v в t. Обратное утверждение следует из того, что любой отрезок кратчайшего пути есть кратчайший путь между своими концами.

Переформулируем утверждение так:

1′. $V(S) = \bigcup\limits_{i=0}^{k} V_i$, где $v \in V_i \Leftrightarrow v \in V(\tilde{\Gamma}),\ l(s, v) = i,\ l(v, t) = k - i.$

2. $Q(S) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i$, где $[a, b] \in Q_i \Leftrightarrow [a, b] \in Q(\tilde{\Gamma}),\ a \in V_{i-1},\ b \in V_i.$

Утверждение почти очевидно следует из предыдущего. Непосредственное доказательство аналогично приведенному выше.

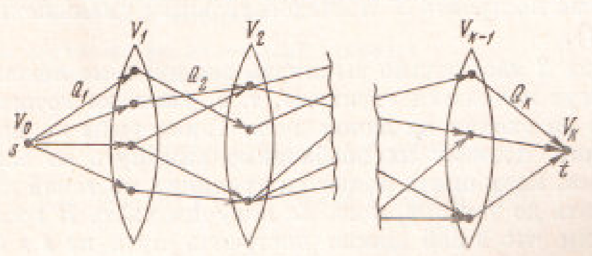

Рис. 1

Справочную можно построить следующим образом. Пусть дан граф $\tilde{\Gamma}$. Построим множества узлов A_i $(0 \leqslant i \leqslant l(s, t))$, где $a \in A_i \Leftrightarrow a \in V(\tilde{\Gamma})$, $l(s, a) = i$. Очевидно $A_0 = \{s\}$. Пусть множества A_i $(i < j)$ построены, и узлы, принадлежащие им, помечены индексом i. Тогда, перебирая все дуги, исходящие из узлов A_{j-1}, пометим все не помеченные до этого вершины индексом j и образуем из них множество A_j. Процесс закончим, когда в некоторое множество A_k войдет t. Отсюда $l(s, t) = k$. Построим теперь рекуррентно искомые множества V_i и Q_i. Известно, что $V_k = \{t\}$. Пусть построено множество V_j $(j \leqslant k)$. Тогда Q_j состоит из тех дуг, которые ведут из A_{j-1} в V_j, а V_{j-1} состоит из начальных узлов этих дуг. Обоснования метода тривиальны. Отметим, что для построения удобно, если для каждого узла заранее перечислены все входящие в него и все выходящие из него дуги.

Итак, пусть имеется справочная S графа $\widetilde{\Gamma}$. Тогда какой-нибудь кратчайший путь из s в t легко построить, последовательно находя в справочной произвольные дуги вида $[s, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{k-1}, a_k]$. Здесь, очевидно, $a_i \in V_i$, откуда $a_k = t$, что и требовалось. Корректность построения следует из того, что $\forall v \in V(S)$, $v \neq s, t$ $\exists [x, v]$, $[v, y] \in Q(S)$ (по определению справочной).

Аналогично можно построить путь, содержащий данную дугу (или узел) из S, достраивая его как в сторону t, так и в сторону s.

Изменение справочной. Покажем, как почти во всех случаях можно изменить справочную S, чтобы получить справочную S'.

Лемма. *Пусть поток f' получен из потока f изменением с помощью кратчайшего пути L, и $l(s, t) = k$.*

Тогда: а) $l'(s, t) \geqslant k$; б) *если* $l'(s, t) = k$, *то* $S' \subset S$ (*как части графа* Γ).

Рассмотрим разность $\widetilde{\Gamma}' \setminus \widetilde{\Gamma}$ (в графе Γ). По определению, $q \in Q(\widetilde{\Gamma}' \setminus \widetilde{\Gamma}) \Leftrightarrow q \in Q(\Gamma)$, $\delta(q) = 0$, $\delta'(q) > 0$. Так как величина δ увеличилась только в дугах, противоположных дугам из L, можно утверждать, что $\widetilde{\Gamma}' \setminus \widetilde{\Gamma}$ состоит только из дуг, противоположных дугам из S. Докажем, что добавление к графу одной дуги такого типа не меняет справочной, откуда по индукции будет следовать, что справочная графа $\widetilde{\Gamma}' \cup \widetilde{\Gamma}$ совпадает с S.

Рассмотрим произвольный путь из s в t в новом графе, содержащий новое ребро $[a, b]$. Его отрезок от s до a состоит только из старых ребер, и потому его длина не менее $l(s, a)$. Аналогично отрезок пути от b до t не короче $l(s, b)$. Отсюда длина пути не менее $l(s, a) + 1 + l(b, t) = l(s, a) + l(a, t) + 2 = k + 2$.

Из определения справочной следует утверждение.

Ввиду включения $\widetilde{\Gamma}' \subseteq \widetilde{\Gamma}' \cup \widetilde{\Gamma}$ имеем включение $S' \subseteq S$, если $l'(s, t) = l(s, t)$. Оно строгое, так как в графе $\widetilde{\Gamma}'$ не будет тех дуг пути L, для которых $\delta(q) = \min\limits_{q \in L} \delta(q)$. Лемма доказана.

Покажем, как построить S' последовательным уменьшением S в случае $l'(s, t) = l(s, t)$.

Очевидно, из S необходимо выкинуть все дуги, не лежащие в $\widetilde{\Gamma}'$. При этом в ней могут появиться «тупики», т. е. узлы, из которых не выходит или в которые не входит ни одной дуги. Такие узлы не могут принадлежать справочной, поэтому их необходимо выкинуть со всеми инцидентными им дугами. Если опять появятся «тупики», то такой процесс необходимо продолжать до тех пор, пока не получим часть R графа Γ' без «тупиков». Заметим, что в ней можно построить путь из s в t, содержащий любую дугу или любой узел, способом, описанным выше для справочной. Длина такого пути равна k, так как он лежит в S. Отсюда, если R непуста, то $S' = R$. Если же R окажется пустой, то путей длины k из s в t не существует, и $l'(s, t) \geqslant k + 1$. В таком случае справочную S' надо строить заново.

Доказательство сходимости. Заметим, что в результате увеличения потока с помощью кратчайшего пути из s в t либо уменьшается число дуг в справочной, либо увеличивается расстояние от s до t. Так как первое всегда конечно, а второе не превышает числа узлов графа Γ, то через конечное число шагов мы придем к потоку $\bar{f}$, которому соответствует граф Г без путей из s в t. Значит, для такого потока нет увеличивающих его путей, и, по Форду и Фалкерсону, он максимален, что и требовалось.

Оценка порядка количества действий, необходимых для осуществления описанного алгоритма.

Главную часть этого количества Q составляют действия, необходимые для поиска путей и для изменения функции δ. На каждом шагу на это требуется порядка n действий. Число дуг в справочной не более p, а различных расстояний от s до t не более n. Отсюда имеем слагаемое Q порядка n^2p. Здесь, возможно, несколько завышена оценка среднего числа шагов, необходимых для вырождения одной справочной.

На построение одной справочной, вообще говоря, требуется порядка p действий. Отсюда появляется слагаемое Q порядка np.

При изменении справочной число действий, необходимых для изменения информации, относящейся к вычеркиваемой дуге или вершине, не превосходит некоторой константы, не зависящей от n и p. Отсюда следует, что таких действий в каждой справочной будет произведено не более $C(n+p)$, и возникающее слагаемое имеет порядок np.

Таким образом, Q оценивается сверху величиной Cn^2p, а в целочисленном случае действий, лишних по сравнению с алгоритмом Форда и Фалкерсона, не более C_1np.

При внимательном рассмотрении алгоритма можно заметить, что асимптотически C — величина не более чем нулевого (десятичного) порядка (действия считаются машинными).

Модификация справочной. Большой справочной сети Г назовем граф $\tilde{\Gamma}$, для каждого узла v которого вычислены $l(s, v)$ и $l(v, t)$ и определена «полезность» каждой его дуги в следующем смысле. Дуга $[a, b]$ называется полезной как исходящая, если $l(s, b) = l(s, a) + 1$; полезной как входящая, если $l(a, t) = l(b, t) + 1$, и вполне полезной, если выполнены оба условия. Легко доказать, что множество вполне полезных дуг совпадает с множеством дуг справочной графа $\tilde{\Gamma}$, описанной выше.

Изменение большой справочной на каждом шагу алгоритма состоит: а) в изменении графа $\tilde{\Gamma}$; б) в исправлении функций $l(s, v)$ и $l(v, t)$ для узлов, которые выше назывались тупиками; в) в соответствующем изменении полезности инцидентных им дуг.

Таким образом, большая справочная сети Г с успехом заменяет справочную графа $\tilde{\Gamma}$, и ни разу в процессе алгоритма не требуется построения ее заново.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Центральный научно-исследовательский институт
патентной информации
Москва

Поступило
18 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, Потоки в сети, М., 1966.