Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 517.917 *МАТЕМАТИКА*

Э. МУХАМАДИЕВ

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 XII 1969)

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx / dt = F(t, x), \tag{1}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — точка n-мерного пространства R^n, а вектор-функция $F(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности переменных t, x в области $(-\infty < t < \infty,\ x \in R^n)$ и ω-периодическая по t. Как известно (см. [1]), вопрос о существовании ω-периодических решений у системы (1) может быть сведен к вопросу о существовании неподвижных точек у некоторых интегральных операторов, действующих в различных функциональных пространствах. Примером таких операторов может служить вполне непрерывный оператор A, определенный равенством

$$Ax(t) = x(\omega) + \int_0^t F[s\, x(s)]\, ds, \tag{2}$$

действующий в пространстве $C[0, \omega]$ непрерывных на отрезке $[0, \omega]$ вектор-функций. Нетрудно видеть, что неподвижные точки оператора (2) (и только они) определяют ω-периодические решения системы (1). Таким образом, вопрос о существовании ω-периодических решений системы (1) равносилен вопросу о существовании нулей вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi x(t) = x(t) - Ax(t). \tag{3}$$

Условия существования нулей у вполне непрерывных векторных полей дает следующий общий топологический принцип (см. [2, 3]).

Пусть вполне непрерывное векторное поле Φ, *определенное на множестве* $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, *где* Ω — *некоторая ограниченная область в банаховом пространстве* $C[0, \omega]$ *с границей* Γ, *не имеет на* Γ *нулевых векторов. Пусть вращение* $\gamma[\Phi; \Gamma]$ *поля* Φ *на границе* Γ *отлично от нуля. Тогда существует такая точка* $x_0 = \Omega$, *что* $\Phi x_0 = \theta$.

Настоящая работа посвящена вычислению вращения вполне непрерывного векторного поля (3) для некоторых классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Пусть система (1) имеет вид

$$dx / dt = P(t, x) + f(t, x), \tag{4}$$

где вектор-функция $P(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных t, x, ω-периодическая по t и положительно-однородная по x порядка $m > 0$ $(P(t, \lambda x) = \lambda^m P(t, x)$ при $\lambda \geqslant 0)$, а непрерывная вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \{\|x\|^{-m} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|f(t, x)\|\} = 0.$$

Наряду с системой (4) рассмотрим систему

$$dx / dt = P(t, x). \tag{5}$$

Систему (5) будем называть m-системой, если:

а) при $m > 1$ автономная система

$$dy / dt = P(t_0, y)$$

при каждом $t_0 \in [0, \omega]$ не имеет ненулевых ограниченных на всей оси $(-\infty, +\infty)$ решений;

б) при $m = 1$ система (5) не имеет ненулевых ω-периодических решений;

в) при $m < 1$ автономная система

$$\frac{dy}{dt} = \int_0^\omega P(s, y)\, ds$$

не имеет ненулевых стационарных решений.

Как уже отмечалось выше, ω-периодические решения системы (4) определяются нулями вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi_1 x(t) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t \{P[s, x(s)] + f[s, x(s)]\}\, ds. \tag{6}$$

Будем говорить, что векторное поле Φ невырождено на бесконечности, если $\Phi x \neq 0$ вне некоторого шара.

Пусть вполне непрерывное векторное поле Φ невырождено на бесконечности. Тогда вращения $\gamma[\Phi; S_\rho]$ поля Φ на сферах S_ρ достаточно большого радиуса совпадают. Это общее вращение $\gamma[\Phi; \infty]$ назовем вращением вполне непрерывного поля Φ на бесконечности.

Рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi_0 x(t) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t P[s, x(s)]\, ds. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть система* (5) *является m-системой.*

Тогда векторные поля (6) *и* (7) *невырождены на бесконечности и их вращения совпадают*: $\gamma[\Phi_1; \infty] = \gamma[\Phi_0; \infty]$.

2. Теорема 1 дает возможность сводить вычисления вращения вполне непрерывного векторного поля (6) к вычислению вращения более простого векторного поля (7). В этом пункте мы укажем формулы для вычисления вращения вполне непрерывного векторного поля (7).

Рассмотрим конечномерное векторное поле

$$\Psi x = -\int_0^\omega P(s, x)\, ds \quad (x \in R^n). \tag{8}$$

Пусть поле Ψ на единичной сфере $S \subset R^n$ не имеет нулевых векторов. Тогда определено вращение $\gamma[\Psi; S]$ поля Ψ на сфере S.

Теорема 2. *Пусть порядок однородности m функции $P(t, x)$ меньше единицы: $m < 1$. Пусть система* (5) *является m-системой и векторное поле* (8) *на единичной сфере S не имеет нулевых векторов.*

Тогда вращение $\gamma[\Phi_0; \infty]$ поля (7) *на бесконечности совпадает с вращением $\gamma[\Psi; S]$ поля* (8) *на единичной сфере.*

Предположим, что система (5) не имеет ненулевых ω-периодических решений. Тогда, очевидно, вращение $\gamma[\Phi_0; \infty]$ поля (7) на бесконечности совпадает с индексом $\gamma[\Phi_0; \theta]$ нулевой особой точки этого поля, а индекс $\gamma[\Phi_0; \theta]$ нулевой особой точки поля (7) в случае, когда $m > 1$, равен вращению $\gamma[\Psi; S]$ поля (8) на единичной сфере S. Поэтому справедлива

Теорема 3. *Пусть $m > 1$ и система (5) не имеет ненулевых ω-периодических решений. Пусть поле (8) на единичной сфере не имеет нулевых векторов.*

Тогда справедливо равенство

$$\gamma[\Phi_0; \infty] = \gamma[\Psi; S].$$

Рассмотрим семейство систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx / dt = P(t, x) + \mu[P(t_0, x) - P(t, x)] \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1) \tag{9}$$

в конечномерное векторное поле Ψ_0, определенное равенством

$$\Psi_0 x = -P(0, x). \tag{10}$$

Теорема 4. *Пусть $m > 1$ и найдется такое $t_0 \in [0, \omega]$, что каждая система семейства (9) является m-системой.*

Тогда справедливо равенство

$$\gamma[\Phi_0; \infty] = \gamma[\Psi_0; S],$$

где $\gamma[\Psi_0; S]$ — вращение векторного поля (10) на единичной сфере S.

Предположим, что функция $P(t, x)$ не зависит от t, т. е. $P(t, x) \equiv P(0, x)$. Тогда справедлива

Теорема 5. *Пусть $m \geqslant 1$ и система (5) не имеет циклов и ненулевых состояний равновесия.*

Тогда вращение $\gamma[\Phi_0; \infty]$ поля (7) на бесконечности совпадает с вращением $\gamma[\Psi_0; S]$ поля (10) на единичной сфере S.

Заметим, что для вычисления или оценки вращения конечномерных векторных полей можно использовать результаты работ ([4], [5]).

3. Теперь сформулируем один общий признак существования периодических решений у системы (4).

Теорема 6. *Пусть функция $P(t, x)$ такова, что система (5) является m-системой. Пусть вращение $\gamma[\Phi_0; \infty]$ поля (7) на бесконечности отлично от нуля.*

Тогда у системы (4) существует по крайней мере одно ω-периодическое решение.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из общего топологического принципа, приведенного выше, и утверждения теоремы 1.

Приведем некоторые признаки отличия от нуля вращения поля (7) (см. ([3], [6])).

1) Пусть система (5) является m-системой. Пусть вектор-функция $P(t, x)$ нечетная по x:

$$P(t, -x) = -P(t, x).$$

Тогда вращение $\gamma[\Phi_0, \infty]$ поля (7) нечетное.

2) Пусть система (5) является m-системой. Пусть существует такая периодическая матрица U периода p: $U^i \neq I$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ и $U^p = I$, что для матриц U^i $(i = 1, \ldots, p-1)$ единица не является собственным значением. Пусть $P(t, x)$ удовлетворяет условию

$$P(t, Ux) = UP(t, x) \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega,\ x \in R^n).$$

Тогда $\gamma[\Phi_0; \infty] = 1 + kp$, где k — некоторое целое число.

Из утверждения 1), 2) и теоремы 6 вытекает

Теорема 7. *Пусть вектор-функция $P(t, x)$ такова, что система (5) является m-системой. Пусть выполнено условие 1) или 2).*

Тогда система (4) имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение.

В заключение отметим, что теорема 1 может быть использована по стандартной схеме (см. ([1])) для доказательства существования вторых периодических решений системы (4).

Автор выражает искреннюю благодарность М. А. Красносельскому, под руководством которого он работает. Автор благодарит Н. А. Бобылеву за ряд советов.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
25 XII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, «Наука», 1966. [2] Ж. Лере, Ю. Шаудер, УМН, 1, № 3—4 (1946). [3] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956. [4] P. A. Smith, Ann. Math., (2), 42 (1941). [5] М. А. Красносельский, ДАН, 101, № 3 (1955). [6] Э. Мухамадиев, УМН, 22, в. 2 (134) (1967).