Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 1

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Н. Х. ИБРАГИМОВ

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 III 1970)

I. Одним из замечательных свойств волнового уравнения

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}-u_{zz}=0 \tag{1}$$

является то, что для него справедлив принцип Гюйгенса. Это означает следующее: для уравнения (1) решение задачи Коши в точке $\mathrm{x}=(x, y, z, t)$ зависит только от значений начальных данных в произвольно малой окрестности пересечения характеристического коноида (с вершиной в точке x) с поверхностью, несущей начальные данные. Адамаром ([1–3]) была поставлена задача об описании всего класса линейных гиперболических уравнений второго порядка

$$g^{ij}(\mathrm{x})u_{ij}+b^i(\mathrm{x})u_i+c(\mathrm{x})u=0, \tag{2}$$

для которых справедлив принцип Гюйгенса (см. также работы ([4–8])). Мы будем рассматривать случай только четырех независимых переменных x^i $(i=1,\ldots,4)$, поэтому ниже считается, что в (2) по индексам i, j производится суммирование от 1 до 4.

Принцип Гюйгенса инвариантен относительно преобразований (преобразований эквивалентности): a) невырожденное преобразование координат $x'^i=x'^i(\mathrm{x})$; b) линейная замена функции $u'=\lambda(\mathrm{x})u$, $\lambda(\mathrm{x})\neq 0$; c) умножение уравнения (2) на функцию $\nu(\mathrm{x})\neq 0$.

Поэтому два уравнения вида (2), которые могут быть получены друг из друга указанными преобразованиями, будут считаться эквивалентными.

М. Матиссон доказал ([9]), что любое уравнение (2) с постоянными коэффициентами g^{ij} $(i, j=1,\ldots,4)$, для которого справедлив принцип Гюйгенса, эквивалентно волновому уравнению (для числа переменных, большего четырех, это неверно ([10])). Результат Матиссона, казалось, указывал на справедливость предположения Адамара о том, что для уравнения вида (2) принцип Гюйгенса верен только тогда, когда это уравнение эквивалентно волновому уравнению (гипотеза Адамара). Однако недавно мы привели пример * уравнения вида (2), для которого справедлив принцип Гюйгенса и которое не эквивалентно волновому уравнению ([11]).

Этот пример был рассмотрен в связи с изучением уравнений (2) с «хорошими» групповыми свойствами ([12]). Оказывается, что групповые свойства уравнений (2) и наличие принципа Гюйгенса тесно связаны друг с другом. А именно, в случае существования в римановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(\mathrm{x})$ «нетривиальной» (см. ниже) конформной группы для уравнения (2) принцип Гюйгенса справедлив тогда и только тогда, когда это уравнение конформно инвариантно. В настоящей работе приводятся основные моменты доказательства этого факта. Дается явная формула решения задачи Коши для произвольного конформно инвариантного уравнения вида (2) с нетривиальной конформной группой. В число этих последних входят, естественно, как уравнение (1), так и наш пример, приведенный в ([11]).

---

* После написания настоящей работы мне стало известно, что раньше аналогичный пример привел П. Гюнтер ([17]).

II. Группа Ли G называется конформной группой риманова пространства V_4 с метрическим тензором g_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 4)$, если для любой однопараметрической подгруппой группы G с инфинитезимальным оператором $X = \xi^i(\mathrm{x})\partial / \partial x^i$ выполняются уравнения Киллинга [13]

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \mu(\mathrm{x}) g_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, 4). \tag{3}$$

Здесь $\xi_i = g_{ij}\xi^j$, а индексы после запятой обозначают ковариантное дифференцирование. Если для всех однопараметрических подгрупп $\mu(\mathrm{x}) \equiv 0$, то группа G называется группой движений. Конформная группа пространства V_4 называется тривиальной, если она является группой движений в некотором римановом пространстве, конформном пространству V_4. Конформная группа, не являющаяся тривиальной, называется нетривиальной конформной группой [14]. Для простоты ограничимся случаем аналитических функций $g_{ij}(\mathrm{x})$.

Ниже мы воспользуемся следующим фактом, вытекающим из результатов Р. Ф. Билярова (см., например, [14], гл. VII).

Лемма 1. *Любое пространство V_4 сигнатуры $(---+)$ с нетривиальной конформной группой заменой координат и переходом к конформному пространству приводится к пространству с тензором g^{ij} $(g_{ij}g^{jk} \neq \delta_i^k)$ вида*

$$g^{ij}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(x^1 - x^4) & -h(x^1 - x^4) & 0 \\ 0 & -h(x^1 - x^4) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f - h^2 > 0. \tag{4}$$

При этом порядок конформной группы равен или 6, или 7, или 15.

III. Запишем уравнение (2) в виде

$$L(u) \equiv g^{ij}u_{,ij} + a^i u_{,i} + cu = 0, \tag{5}$$

используя ковариантные производные в римановом пространстве V_4 с метрическим тензором g_{ij}. Свойства инвариантности уравнения (5) относительно непрерывных групп преобразований описываются [15] с помощью функций $K_{ij} = a_{i,j} - a_{j,i}$ $(i, j = 1, \ldots, 4)$ и $H = -2c + a^i_{,i} + {}^1/_2 a^i a_i + {}^1/_3 R$, где R — скалярная кривизна пространства V_4. А именно, координаты $\xi^i(\mathrm{x})$ инфинитезимального оператора любой однопараметрической подгруппы группы Ли, допускаемой уравнением (5), определяются как решения уравнений (3) и уравнений

$$\xi^k H_{,k} + \mu H = 0, \quad (K_{il}\xi^l)_{,j} - (K_{jl}\xi^l)_{,i} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, 4). \tag{6}$$

Поэтому группа, допускаемая уравнением (5), является подгруппой группы конформных преобразований V_4.

Для дальнейшего нам важно выяснить, какие уравнения (5) инвариантны относительно всей конформной группы в V_4 (такие уравнения будем называть конформно инвариантными). Для пространств с нетривиальной конформной группой этот вопрос решает следующая

Теорема 1. *В любом пространстве V_4 сигнатуры $(---+)$ с нетривиальной конформной группой всякое конформно инвариантное уравнение вида* (5) *эквивалентно уравнению*

$$g^{ij}u_{,ij} + {}^1/_6 Ru = 0. \tag{7}$$

Доказательство. В силу леммы 1 эту теорему достаточно доказать для пространств с тензором $g^{ij}(\mathrm{x})$ вида (4), для которых конформная группа легко вычисляется [14]. Решая уравнения (6), получим

$$K_{ij} = 0 \; (i, j = 1, \ldots, 4), \quad H = 0, \tag{8}$$

откуда следует утверждение теоремы (см., например, [3, 15]).

Интересно отметить, что для пространств с тривиальной конформной группой, кроме уравнения (7), существует по крайней мере еще одно конформно инвариантное уравнение, не эквивалентное уравнению (7).

IV. Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - f(x-t)u_{yy} - 2h(x-t)u_{yz} - u_{zz} = 0, \tag{9}$$

эквивалентного уравнению (7) в пространстве с тензором g^{ij} вида (4), задачу Коши с начальными данными

$$u|_{t=0} = 0, \tag{9$_1$}$$

$$u_t|_{t=0} = \varphi(x, y, z). \tag{9$_2$}$$

Здесь $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$, $t = x^4$. Ограничение (9_1) не существенно, так как для уравнения (9) задача Коши с произвольными начальными данными может быть сведена к задаче $(9)-(9_2)$, и оно не влияет на факт наличия или отсутствия принципа Гюйгенса.

Решение задачи $(9)-(9_2)$ имеет вид

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\xi,\ y + A\cos\theta,\ z + B\cos\theta + C\sin\theta)\,d\theta, \tag{10}$$

где

$$A = \{(x+t-\xi)\,[F(\xi) - F(x-t)]\}^{1/2},$$

$$B = [H(\xi) - H(x-t)]\left[\frac{x+t-\xi}{F(\xi) - F(x-t)}\right]^{1/2},$$

$$C = \left\{(x+t-\xi)\left[\xi - x + t - \frac{(H(\xi) - H(x-t))^2}{F(\xi) - F(x-t)}\right]\right\}^{1/2},$$

а F и H — первообразные для функций f и h соответственно.

Из формулы (10) видно, что (при любых $f,\ h \in C^1(R)$, $f > h^2$) для уравнения (9) справедлив принцип Гюйгенса. Действительно, решение задачи $(9)-(9_2)$ в точке x зависит только от значений функции φ на пересечении гиперплоскости $\tau = 0$ с характеристическим коноидом с вершиной в точке x, который задается уравнением $\Gamma(\mathrm{x}, \xi) = 0$. Здесь $\Gamma(\mathrm{x}, \xi)$ обозначает квадрат геодезического расстояния между точками $\mathrm{x} = (x, y, z, t)$ и $\xi = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$ и для уравнения (9) имеет вид

$$\Gamma(\mathrm{x}, \xi) = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 -$$

$$- \frac{x-t-\xi+\tau}{(x-t-\xi+\tau)(F(x-t) - F(\xi-\tau)) - (H(x-t) - H(\xi-\tau))^2} \times$$

$$\times \{(x-t-\xi+\tau)/(y-\eta)^2 - 2(H(x-t) - H(\xi-\tau))(y-\eta)(z-\zeta) +$$

$$+ (F(x-t) - F(\xi-\tau))(z-\zeta)^2\}. \tag{11}$$

Наш пример в ([11]) соответствует случаю $h \equiv 0$. Если положить $h \equiv 0$, $f \equiv 1$, то из (10) можно получить известную формулу Пуассона для волнового уравнения (1).

V. Теорема 2. *Пусть риманово пространство V_4 сигнатуры $(- - - +)$ имеет нетривиальную конформную группу. Тогда для уравнения* (5) *принцип Гюйгенса справедлив в том и только в том случае, если это уравнение конформно инвариантно, т. е. эквивалентно уравнению* (7).

Отметим, что в этой теореме содержится результат М. Матиссона ([9]).

Доказательство теоремы 2 можно получить методом, предложенным Адамаром ([3]) для случая $g^{ij} = \mathrm{const}$. В силу леммы 1 и теоремы 1 нам достаточно доказать, что из справедливости принципа Гюйгенса для уравнения (5) со старшими коэффициентами вида (4) следует выполнение уравнений (8). Мы установим выполнение (8) для уравнения, сопряженного уравнению (5), откуда, в силу самосопряженного уравнения (7), будет следовать справедливость теоремы.

Адамар показал, что для уравнения, сопряженного уравнению (5), принцип Гюйгенса верен тогда и только тогда, когда выполняется уравнение $L(W_0)=0$ вдоль характеристического коноида с вершиной в произвольной точке x_0. Здесь $W_0 = \exp\left\{-\frac{1}{4}\int\limits_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}}(L(\Gamma)-c\Gamma-8)\frac{dS}{S}\right\}$, интеграл берется вдоль геодезической, соединяющей точки $\mathrm{x}=(x, y, z, t)$ и $\mathrm{x}_0=(x_0, y_0, z_0, t)$; $\Gamma=S^2$ — квадрат геодезического расстояния. При этом W_0 рассматривается как функция точки x.

Применяя критерий Адамара, записанный в виде $L(W_0)=\lambda\Gamma$ с неопределенным (регулярным) коэффициентом $\lambda=\lambda(x)$, получим, что в точке x_0 выполняются уравнения (8). В силу произвольности точки x_0 отсюда следует справедливость теоремы.

VI. В работе ([12]) уравнение (7) рассматривалось в качестве уравнения, описывающего распространение световых волн в римановом пространстве V_4, исходя из факта конформной инвариантности этого уравнения. Еще раньше (и, по-видимому, впервые) уравнение (7) рассматривалось в работе ([16]) также с точки зрения конформной инвариантности. Теорема 2 дает некоторое физическое обоснование выбора уравнения (7) в качестве волнового уравнения в римановом пространстве (быть может, с точностью до некоторого преобразования эквивалентности b), c) при $\nu=1/\lambda$). А именно, рассматривая задачу излучения ([5]) и используя теорему 2, мы видим, что в случае существования нетривиальной конформной группы в пространстве V_4 резкие световые сигналы передаются и могут приниматься как резкие, если распространение световых волн в пространстве V_4 описывается уравнением (7).

Автор выражает признательность Л. В. Овсянникову за полезное обсуждение работы.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
27 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, Cambridge — New Haven, 1923. [2] J. Hadamard, Bull. Soc. Math. de France, 52 (1925). [3] J. Hadamard, Ann. Math., 43, 510 (1942). [4] Ж. Адамар, Матем. сборн., 41, в. 3, 404 (1934). [5] Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1964. [6] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1961. [7] A. Douglis, Comm. Pure and Appl. Math., 9, 391 (1956). [8] L. Asgeirsson, Comm. Pure and Appl. Math., 9, 307 (1956). [9] M. Mathisson, Acta Math., 71, 249 (1939). [10] K. Stellmacher, Math. Ann., 130, № 3, 219 (1955). [11] Н. Х. Ибрагимов, Е. В. Мамонтов, C.R., 270, 456 (1970). [12] Н. Х. Ибрагимов, ДАН, 183, № 2 (1968). [13] Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948. [14] А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, М., 1966. [15] Л. В. Овсянников, Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1962. [16] R. Penrose, Relativity, Groups and Topology the 1963 Les Houches Lectures, N. Y., 1964, p. 565. [17] P. Günther, Arch. Rational Mech. Anal., 18, № 2, 103 (1965).