Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 517.522.3+517.512.5 *МАТЕМАТИКА*

Л. В. ЖИЖИАШВИЛИ

О РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 18 III 1970)

1. Хорошо известно (см. [1] или [2], стр. 599), что существует 2π-периодическая функция $f(x)\in L(-\pi,\pi)$, ряд Фурье $\sigma[f]$ которого не сходится в метрике $L(-\pi,\pi)$. С другой стороны (см. [3], стр. 424), если $f(x)\in L\log^+L$, то ряд $\sigma[f]$ сходится в метрике $L(-\pi,\pi)$. Естественно возникает вопрос: что можно сказать о сходимости рядов $\sigma[f]$ в смысле пространства $L(-\pi,\pi)$ в том случае, когда $f(x)\in L(\log^+L)^\alpha$ при всех $\alpha\in(0,1)$?

Далее, известно (см. [4], стр. 258), что если $f(x)\in L(-\pi,\pi)$ и его интегральный модуль непрерывности $\omega(\delta,f)_L$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta,f)_L=O\left\{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1-\varepsilon}\right\},\quad \varepsilon>0\ (\delta\to0), \tag{1}$$

то ряд $\sigma[f]$ сходится как в метрике $L(-\pi,\pi)$, так и почти всюду. Гарантирует ли условие (1) с $\varepsilon=0$ сходимость ряда $\sigma[f]$ почти всюду или в смысле метрики $L(-\pi,\pi)$? Это неизвестно. Однако (см. [3], стр. 288, или [5], стр. 100), если

$$\omega(\delta,f)_L=o\left\{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right\}\quad(\delta\to0), \tag{2}$$

то ряд $\sigma[f]$ сходится в метрике $L(-\pi,\pi)$. Неизвестно, можно ли в соотношении (2) символ o заменить на O.

Ниже будут приведены утверждения, которые дают ответы (относительно сходимости в метрике $L(-\pi,\pi)$) на поставленные вопросы; будут также приведены результаты, представляющиеся обобщениями полученных нами утверждений на случай кратных тригонометрических рядов Фурье.

2. Пусть $f(x)\in L(-\pi,\pi)$. Как обычно, через $\bar f(x)$ обозначаем сопряженную функцию к $f(x)$, а символом $\bar\sigma[f]$ — сопряженный тригонометрический ряд для $\sigma[f]$.

Теорема 1. *Существует такая функция $f_0(x)\in L(-\pi,\pi)$, что:*

а) $\omega(\delta,f_0)_L=O\left\{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right\}$, $\omega(\delta,\bar f_0)_L=O\left\{\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right\}\quad(\delta\to0)$;

б) *ряды $\sigma[f_0]$ и $\bar\sigma[f_0]$ не сходятся в метрике $L(-\pi,\pi)$.*

Теорема 1 показывает, что условие (2) существенно для сходимости ряда $\sigma[f]$ в смысле метрики $L(-\pi,\pi)$; стало быть, условие (1) с $\varepsilon=0$, вообще говоря, не гарантирует сходимость ряда $\sigma[f]$ в метрике $L(-\pi,\pi)$ (ср. с соответствующим утверждением из книги [4], стр. 258).

Заметим также, что в пункте б) теоремы 1 можно ограничиться рассмотрением одного ряда из рядов $\sigma[f_0]$ и $\bar\sigma[f_0]$, ибо функции $f_0(x)$ и $\bar f_0(x)$ суммируемы, а в таком случае (см. [2], стр. 602) расходимость одного ряда в метрике $L(-\pi,\pi)$ влечет расходимость другого ряда в смысле той же метрики.

Используя результаты П. Л. Ульянова [6], согласно теореме 1 получается

Следствие. *Существует такая функция $f_0(x)$, что $(f_0(x),\bar f_0(x))\in L(\log^+L)^\alpha$ при всех $\alpha\in[0,1)$, однако ряды $\sigma[f_0]$ и $\sigma[\bar f_0]$ не сходятся в метрике $L(-\pi,\pi)$.*

Теорема 1 показывает, что для сходимости $\sigma[f]$ в метрике $L(-\pi, \pi)$ существенно условие $f(x) \in L\log^+ L$.

3. Пусть теперь $R = [-\pi, \pi; -\pi, \pi; \dots; -\pi, \pi]$ и рассмотрим 2π-периодическую относительно каждой из переменных функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(R)$. Символами $\omega(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, f)_L$, $\omega(\delta_1, \delta_2 \dots, \delta_{n-1}, f)_L, \dots, \omega(\delta_1, \delta_2, f)_L, \dots, \omega(\delta_1, f)_L, \dots, \omega(\delta_n, f)_L$ будем обозначать соответственно полный и частные интегральные модули непрерывности функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причем предполагается, что δ_k соответствует x_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Через $\sigma_n[f]$ обозначаем n-кратный (см. ([5]), стр. 256) тригонометрический ряд Фурье функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а выражениями $\bar\sigma_n[f, x_1], \bar\sigma_n[f, x_2], \dots, \bar\sigma_n[f, x_1, x_2], \dots, \bar\sigma_n[f, x_{n-1}, x_n], \dots, \bar\sigma_n[f, x_1, x_2, \dots, x_n]$ будем обозначать n-кратные (см. ([5]), стр. 256) сопряженные тригонометрические ряды. Что касается (см. ([5]), стр. 257) сопряженных функций переменных, то их обозначаем символами $\bar f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \bar f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \bar f_{1, 2, \dots, n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Так как при изучении кратных рядов можно рассматривать разные виды сходимости, то мы ограничимся рассмотрением сходимости по Принсгейму.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(R)$ *и* $1 \leqslant i \leqslant m$ $(m = 1, 2, \dots, n)$. *Если*

$$\omega(\delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_m, f)_L = o\left\{\prod_{k=i}^{m}\left(\log\frac{1}{\delta_k}\right)^{-1}\right\} \quad (\delta_k \to 0, k = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

то ряд $\sigma_n[f]$ *сходится в метрике* $L(R)$.

Приведенная теорема в некотором смысле окончательна, так как верна

Т е о р е м а 3. *Существует функция* $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(R)$, *для которой*

$$\text{а) } \omega(\delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_m, f_1)_L = O\left\{\prod_{k=i}^{m}\left(\log\frac{1}{\delta_k}\right)^{-1}\right\} \quad (\delta_k \to 0); \tag{4}$$

б) *интегральные модули непрерывности всех сопряженных функций для* $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *также удовлетворяют соотношениям* (4);

в) *ряд* $\sigma_n[f_1]$ *не сходится в метрике* $L(R)$.

Заметим, что даже выполнение условия (3) в том смысле, что при некоторых m_0 и i_0 (они могут быть равными) o заменено на O, не гарантирует сходимость в метрике $L(R)$ ряда $\sigma_n[f]$.

Отметим также, некоторые ряды из n-кратных сопряженных тригонометрических рядов могут быть сходящимися в смысле метрики $L(R)$, что не имеет места в одномерном случае.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
7 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Zygmund, Proc. Lond. Math. Soc., 34, 392 (1932). [2] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961. [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, М., 1965. [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, М., 1965. [5] Л. В. Жижиашвили, Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969. [6] П. Л. Ульянов, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 649 (1968).