Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Л. В. САБИНИН

О КЛАССИФИКАЦИИ ТРИСИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 III 1970)

В настоящей заметке будут указаны все нетривиальные трисимметрические пространства ([1]) с простыми компактными группами Ли движений.

Как известно ([1]), однородное риманово пространство $V = Q / H$ называется трисимметрическим, если через каждую его точку x проходит три попарно ортогональных зеркала $W_x^{(1)}, W_x^{(2)}, W_x^{(3)}$, причем локально (в некоторой окрестности Ω_x точки x) $W_x^{(1)} \cap W_x^{(2)} \cap W_x^{(3)} = \{x\}$, $\dim V = \sum_{\alpha=1}^{3} \dim W_x^{(\alpha)}$. Если еще существует $p \in \operatorname{Aut}(Q)$, $p^3 = I$, такое, что $pW_x^{(1)} = W_x^{(2)}$, $pW_x^{(2)} = W_x^{(3)}$, $pW_x^{(3)} = W_x^{(1)}$, то будем говорить, что $V = Q/H$ сверхтрисимметрично. Зеркало ([2]) в точке $x \in V = Q / H$ — максимальное множество точек $y \in V$, неподвижных относительно изометрической субсимметрии ([2]) S_x $((S_x)^2 = I,\ S_x(x) = x)$. Зеркало — вполне геодезическая поверхность в римановом $V = Q / H$ ([1, 2]). Если Γ — алгебра Ли группы Q, то введем обозначение $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \ln(Q)$; если подалгебра $L \subseteq \Gamma$, а соответствующая ей подгруппа $H \subseteq Q$, то будем употреблять запись $L \overset{\text{def}}{=} \ln_Q(H)$.

Запись вида Q / H означает, что это однородное пространство, порожденное группой Q и подгруппой H, однако такое, что в H может содержаться нетривиальной нормальный делитель группы Q. Равенство $Q' \overset{*}{/} H' = Q'' / H''$ означает изоморфизм $Q' \cong Q''$, индуцирующий изоморфизм $H' \cong H''$. Запись вида Q / H означает, что это однородное пространство, порожденное группой Q и подгруппой H, причем в H содержится лишь тривиальный нормальный делитель группы Q. Наконец, запись $Q' \overset{*}{/} H' = Q'' / H''$ означает существование гомоморфизма φ такого, что $Q' \xrightarrow{\varphi} Q''$, $H' \xrightarrow{\varphi} H''$, а $\operatorname{Ker} \varphi$ есть максимальный нормальный делитель группы Q', принадлежащий H'.

Определение 1. Будем говорить, что группа Ли Q есть инвопроизведение групп Q_1, Q_2, Q_3 и писать $Q = Q_1 \boxtimes Q_2 \boxtimes Q_3$ (или короче $Q = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha$), если Q_α — максимальная подгруппа неподвижных элементов инволютивного инвоморфизма S_α $((S_\alpha)^2 = I)$, группы Q, причем $S_\lambda S_\mu = S_\nu$ $(\lambda \neq \mu,\ \mu \neq \nu,\ \nu \neq \lambda)$. Если еще существует $p \in \operatorname{Aut}(Q)$ такое, что $pQ_1 = Q_2$, $pQ_2 = Q_3$, $pQ_3 = Q_1$, то будем называть инвопроизведение $\boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha$ сверхинвопроизведением.

Определение 2. Будем говорить, что однородьое пространство Q/H есть инвопроизведение однородных пространств $Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ и писать $Q/H = Q_1 \overset{*}{/} H_1 \boxtimes Q_2 \overset{*}{/} H_2 \boxtimes Q_3 \overset{*}{/} H_3$ (или, короче, $Q/H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$), если $Q = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha$, $H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} H_\alpha$. При этом $Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ будем называть зеркалами в Q/H. Заметим, что $Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ — зеркала в Q/H в смысле ([2]).

Переформулируем теперь определение трисимметрического однородного пространства, используя понятие инвопроизведения.

Определение 3. Однородное пространство $Q/H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ — трисимметрическое пространство, если (локально) $\bigcap_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha = Q_0 \subseteq H$, причем тривиальное, если $Q_0 = H$, полутривиальное, если $Q_0 = H_\alpha$ (при некотором α), и нетривиальное в остальных случаях. Если еще $\boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha$ и $\boxtimes_{\alpha=1}^{3} H_\alpha$ — сверхинвопроизведения относительно $p \in \mathrm{Aut}(Q)$, то будем говорить, что Q/H — сверхтрисимметрично. Заметим, что зеркала в трисимметрическом пространстве — симметрические пространства.

Сформулируем две вспомогательные теоремы.

Теорема 1. *Пусть Q проста, $Q/H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ — трисимметрическое нетривиальное пространство с компактной группой H; тогда $Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha = (\widetilde{Q}_\alpha \times \widetilde{H}_\alpha) \overset{*}{/} (\widetilde{Q}_\alpha \cap \widetilde{H}_\alpha) \times \widetilde{H}_\alpha = \widetilde{Q}_\alpha / (\widetilde{Q}_\alpha \cap H_\alpha)$, где $\widetilde{Q}_\alpha \cap H_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha = Q_0$, а $\widetilde{H}_\alpha$ — нормальный делитель в Q_α.*

Теорема 2. *Пусть $Q/H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ — трисимметрическое пространство с компактной группой H и симметрическое пространство $Q_\alpha \overset{*}{/} Q_0$ ($Q_0 = \bigcap_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha$), при некотором α неприводимо, тогда Q/H тривиально или полутривиально.*

Проблему классификации трисимметрических пространств $Q/H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ естественно решать, перейдя от групп к соответствующим алгебрам Ли. Тогда инвопроизведения $Q = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha$ и $H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} H_\alpha$ порождают инволютивные суммы ([3, 5]) алгебр Ли $\ln(Q) = \ln_Q(Q_1) + \ln_Q(Q_2) + \ln_Q(Q_3)$, $\ln_Q(H) = \ln_Q(H_1) + \ln_Q(H_2) + \ln_Q(H_3)$, причем $L_0 = \ln_Q(\bigcap_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha) \subseteq \ln_Q(H)$. Учитывая теоремы 1 и 2, получаем еще для нетривиального трисимметрического пространства Q/H, что $\ln_Q(Q_\alpha) \overset{*}{/} L_0$ ($\alpha = 1, 2, 3$) — приводимые инвопары ([3, 4]). Таким образом, следует в первую очередь искать инволютивные разложения простых компактных алгебр Ли, удовлетворяющие приведенному выше условию. Далее следует искать нетривиальные идеалы M_α в $L_\alpha = \ln_Q(Q_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) так, чтобы $K = M_1 + M_2 + M_3 + L_0$ было подалгеброй в $\Gamma = \ln Q$. Такая подалгебра и определяет $K = \ln_Q(H)$. Наконец, по паре алгебр Γ/K однозначно (локально) восстанавливаем трисимметрическое пространство Q/H, а по инвопарам ([3, 4]) $L_\alpha \overset{*}{/} L_0$ — его зеркала $Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$. В случаях классических простых алгебр $so(n)$, $su(n)$, $sp(n)$ задача решается с использованием известных матричных моделей. Случай особых алгебр g_2, f_4, e_6, e_7, e_8 в силу отсутствия хороших матричных моделей значительно сложнее. При помощи аппарата инволютивных сумм ([3–6]) и некоторой процедуры перестроек инволютивных сумм все необходимые для классификации трисимметрических пространств инволютивные разложения особых алгебр могут быть найдены. Так, если $\Gamma = L_1 + L_2 + L_3$, $L_0 = L_\alpha \cap L_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$, то для инвопар Γ / L_α и приводимых, L_α / L_0 соответственно имеем:

1) $g_2 / so(4)$, $so(4) / so(2) \oplus so(2)$;
2) $f_4 / su(2) \oplus sp(3)$, $su(2) \oplus sp(3) / u(1) \oplus u(3)$;
3) $e_6 / su(2) \oplus su(6)$, $su(2) \oplus su(6) / u(1) \oplus s(u(3) \oplus u(3))$;
4) $e_7 / su(2) \oplus so(12)$, $su(2) \oplus so(12) / u(1) \oplus u(6)$;
5) $e_7 / u(1) \oplus e_6$, $u(1) \oplus e_6 / f_4$;
6) $e_8 / su(2) \oplus e_7$, $su(2) \oplus e_7 / u(1) \oplus u(1) \oplus e_6$.

Отметим, что в 1), 2), 3), 4), 6) Γ / L_2 — главные унитарные инвопары [4], а в 5) Γ / L_α — центральная инвопара [4], кроме того, все полученные разложения сверхинволютивны [4]. Используя полученные разложения для особых алгебр и матричные модели классических алгебр и их инволютивных автоморфизмов, приходим к полной классификации нетривиальных трисимметрических и несимметрических пространств $Q/H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$ с простыми компактными группами Q движений и максимальными группами вращений

$Q/H = \boxtimes_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$	$Q_\alpha \overset{*}{/} H_\alpha$
$G_2 \overset{*}{/} SU(3)$	$SO(4) \overset{*}{/} SU(2) \times SO(2) = SU(2)/SO(2)$
$F_4/SU(3) \times SU(3)$	$SU(2) \times Sp(3) \overset{*}{/} SU(2) \times U(3) = Sp(3)/U(3)$
$E_6/SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$	$SU(2) \times SU(6) \overset{*}{/} SU(2) \times S(U(3) \times U(3)) = SU(6)/S(U(3) \times \times U(3))$
$E_7/SU(6) \times SU(3)$	$SU(2) \times SO(12) \overset{*}{/} SU(2) \times U(6) = SO(12)/U(6)$
$E_7/F_4 \times SO(3)$	$E_6 \times U(1) \overset{*}{/} F_4 \times U(1) = E_6/F_4$
$E_8/SU(3) \times E_6$	$SU(2) \times E_7 \overset{*}{/} SU(2) \times E_6 \times U(1) = E_7/E_6 \times U(1)$
$SO(4m)/Sp(m) \times SO(3)$	$U(2m) \overset{*}{/} Sp(m) \times U(1) = SU(2m)/Sp(m)$
$SU(2m)/SU(m) \times SO(3)$	$S(U(m) \times U(m)) \overset{*}{/} SU(m) \times U(1) = SU(m) \times SU(m)/SU(m)$
$Sp(m)/SO(m) \times SO(3)$	$U(m) \overset{*}{/} SO(m) \times U(1) = SU(m)/SO(m)$

с естественными вложениями.

Все полученные пространства сверхтрисимметричны с главными унитарными или центральными зеркалами (т. е. с зеркалами, порожденными главными унитарными или центральными инвоморфизмами [4, 6] группы Q), причем сопрягающий автоморфизм p принадлежит $SU(3)$ — нормальному делителю группы вращений H в случае главного зеркала и p принадлежит $SO(3)$ — нормальному делителю группы вращений H в случае центрального зеркала.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы
Москва

Поступило
23 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Сабинин, Сибирск. матем. журн., № 2, 2 (1961). [2] Л. В. Сабинин, Научн. докл. высш. школы, сер. физ.-матем. наук, № 3 (1958). [3] Л. В. Сабинин, ДАН, 165, № 5 (1965). [4] Л. В. Сабинин, ДАН, 175, № 1 (1967). [5] Л. В. Сабинин, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, 14 (1968). [6] Л. В. Сабинин, Тр. геометр. семинара Инст. научн. информ. АН СССР, № 2 (1969).