Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 517.948:513.88

МАТЕМАТИКА

И. М. КОВАЛЬЧИК

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 17 III 1970)

1. Пусть X — нормированное пространство, $\mathbf{R}$ — вещественная прямая, а $J(x)$ — функционал на X. Производную Фреше и функциональную производную порядка k ($k=1, \ldots, n$) функционала $J(x)$ (определение см., например, в [1-3]) будем обозначать соответственно символами $J^{(k)}_{x\ldots x}$ и $\delta^k J(x) / \delta x(t_1) \ldots \delta x(t_k)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$J^{(n)}_{x\ldots x} + P_1(x) J^{(n-1)}_{x\ldots x} + \ldots + P_{n-1}(x) J'_x + P_n(x) J = Q(x), \tag{1}$$

$$J^{(k)}_{x\ldots x}\big|_{x=x_0} = J_0^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{2}$$

где $P_k(x)$ ($k=1, \ldots, n-1$) при каждом фиксированном значении x являются линейными операторами из пространства $\mathscr{L}_{n-k}(X, \mathbf{R})$ (непрерывных $n-k$ линейных отображений $\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n-k}$ в $\mathbf{R}$) в пространство $\mathscr{L}_n(X, \mathbf{R})$, а $P_n(x)$ и $Q(x)$ — элементы пространства $\mathscr{L}_n(X, \mathbf{R})$ [4].

Если в качестве пространства X взять пространство функций и специальным образом в уравнении (1) выбрать операторы $P_k(x)$, то частным случаем этого уравнения будет при $n=2$, например, уравнение

$$\frac{\delta^2 J(x)}{\delta x(t_1)\, \delta x(t_2)} + p(x, t_1, t_2) \frac{\delta J(x)}{\delta x(t_1)} + q(x, t_1, t_2) J(x) = f(x, t_1, t_2). \tag{3}$$

Уравнение (1) назовем вполне разрешимым, если начальные условия (2) однозначно определяют решение в некоторой окрестности точки x_0.

Общим решением уравнения (1) назовем функционал $x \to \Phi(x, C_1, \ldots, C_n)$, где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, который удовлетворяет при любых значениях этих постоянных уравнению (1) и при заданных начальных условиях (2) произвольные постоянные могут быть подобраны так, что данный функционал удовлетворяет условиям (2).

Условия полной разрешимости задачи (1), (2) вытекают из теоремы Фробениуса [4]. В частности, для разрешимости уравнения (3) (случай $n=2$ берем для простоты) необходимо и достаточно, чтобы для любых $t_1, t_2, t_3 \in [a, b] \subset \mathbf{R}$ выполнялись условия:

1°. $q(x, t_1, t_2) = q(x, t_2, t_1)$.

2°. $f(x, t_1, t_2) = f(x, t_2, t_1)$.

3°. $p(x_0, t_1, t_2) J_0^1(t_1) = p(x_0, t_2, t_1) J_0^1(t_2)$, где $\delta J(x) / \delta x(t)\big|_{x=x_0} = J_0^1(t)$.

4°. $\delta q(x, t_1, t_2) / \delta x(t_3) - p(x, t_1, t_2) q(x, t_1, t_3) = \delta q(x, t_1, t_3) / \delta x(t_2) - p(x, t_1, t_3) q(x, t_1, t_2)$.

5°. $\delta f(x, t_1, t_2) / \delta x(t_3) - p(x, t_1, t_2) f(x, t_1, t_3) = \delta f(x, t_1, t_3) / \delta x(t_2) - p(x, t_1, t_3) f(x, t_1, t_2)$.

6°. $\delta p(x, t_1, t_2) / \delta x(t_3) = \delta p(x, t_1, t_3) / \delta x(t_2)$.

7°. $[\delta p(x, t_1, t_2) / \delta x(t_3) - p(x, t_1, t_2) p(x, t_1, t_3)] p(x, t_2, t_1) = [\delta p(x, t_2, t_3) / \delta x(t_1) - p(x, t_2, t_1) p(x, t_2, t_3)] p(x, t_1, t_2)$.

Записанные условия являются аналогом известных условий полной разрешимости для уравнения Пфаффа в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответствующие результаты для уравнений, содержащих производную отображения одного конечномерного пространства в другое конечномерное пространство, принадлежит А. И. Перову ([5]).

2. Назовем, как и обычно, фундаментальной системой решений линейно независимую систему из n решений.

Теорема 1. *Пусть $J_1(x), \ldots, J_n(x)$ — фундаментальная система решений вполне разрешимого уравнения* (1) *при $Q=0$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид*

$$J(x)=C_1J_1(x)+\ldots+C_nJ_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — *произвольные постоянные.*

Рассмотрим уравнение

$$L(J)\equiv p_0(x)\delta^nJ(x)\,/\,\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_n)+p_1(x,t_n)\delta^{n-1}J(x)\,/\,\delta x(t_1)\ldots$$
$$\ldots\delta x(t_{n-1})+\ldots+p_{n-1}(x,t_2,\ldots,t_n)\delta J(x)\,/\,\delta x(t_1)+$$
$$+p_n(x,t_1,\ldots,t_n)J(x)=q(x,t_1,\ldots,t_n). \tag{4}$$

Теорема 2. *Предположим, что уравнение* (4) *вполне разрешимо. Пусть функционал $K(x, y)$ при каждом фиксированном значении y удовлетворяет по x уравнению*

$$L(J)=0$$

и условиям

$$K(x,y)\,|_{y=x}=0,$$
$$\delta^kK(x,y)\,/\,\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_k)\,|_{y=x}=0\quad(k=1,\ldots,n-2),$$
$$\delta^{n-1}K(x,y)\,/\,\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_{n-1})\,|_{y=x}=1.$$

Тогда решение уравнения (4) *при начальных условиях*

$$J(x)\,|_{x=x_0}=0,\quad \delta^kJ(x)\,/\,\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_k)\,|_{x=x_0}=0\quad(k=1,\ldots,n-1)$$

имеет вид

$$J(x)=\left\{\int_a^b[x(t)-x_0(t)]\,dt\right\}^{1-n}\int_0^1K[x,s(x-x_0)+x_0]\,ds\times$$
$$\times\int_a^b\overset{(n)}{\ldots}\int_a^b q[s(x-x_0)+x_0,\ t_1,\ldots,\ t_n]\prod_{j=1}^n[x(t_j)-x_0(t_j)]\,dt_j.$$

Заметим, что существует класс уравнений с функциональными производными (в частности, уравнения, для которых функциональные производные от фундаментальной системы решений до $(n-1)$-го порядка не зависят от точек, в которых они вычисляются) такой, что для него можно ввести понятие определителя Вронского и установить ряд результатов, связанных с этим определением, например, формулу Остроградского — Лиувилля.

3. Рассматривая вполне разрешимое уравнение (4) при начальных условиях

$$J(x_0)=J_0,\quad \delta^kJ(x)/\delta x(t_1)\ldots\delta x(t_k)|_{x=x_0}=J_0^k\quad(k=1,\ldots,n-1), \tag{5}$$

получаем его решение в виде

$$J(x)=\varphi\Big(1,x,x_0J_0,\int_a^bJ_0^1(t_1)[x(t_1-x_0(t_1)]\,dt_1,\ldots,\int_a^b\overset{(n-1)}{\ldots}\int_a^bJ_0^{n-1}(t_1,\ldots,t_{n-1})\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n-1}[x(t_j)-x_0(t_j)]\,dt_j\Big), \tag{6}$$

где $\varphi(s, x, x_0, z_0, z_0', \ldots, z_0^{(n-1)})$ при фиксированных x и x_0 является решением задачи

$$a_0(s)d^nz / ds^n + a_1(s)d^{n-1}z / ds^{n-1} + \ldots + a_n(s)z = b(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1),$$
$$z(0) = z_0, \quad d^kz / ds^k|_{s=0} = z_0^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$
$$a_0(s) = p_0[s(x - x_0) + x_0],$$
$$a_k(s) = \int_a^b \overset{(k)}{\ldots} \int_a^b p_k[s(x - x_0) + x_0, t_1, \ldots, t_k] \prod_{j=1}^k [x(t_j) - x_0(t_j)]\, dt_j,$$
$$b(s) = \int_a^b \overset{(n)}{\ldots} \int_a^b q(s(x - x_0) + x_0, t_1, \ldots, t_n] \prod_{j=1}^n [x(t_j) - x_0(t_j)]\, dt_j.$$

При этом функциональные производные могут быть обобщенными функциями параметров $t_1, \ldots, t_n$.

Следствием формулы (6) являются результаты по решению конкретных линейных дифференциальных уравнений с функциональными производными, полученные рядом авторов ([6–8]).

4. Возьмем вполне разрешимое уравнение

$$\delta^n J(x) / \delta x(t_1) \ldots \delta x(t_n) + a_1 p(t_n)\delta^{n-1}J(x) / \delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-1}) +$$
$$+ a_2 p(t_{n-1})p(t_n)\delta^{n-2}J(x) / \delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}p(t_2) \ldots p(t_n)\delta J(x) / \delta x(t_1) + a_n p(t_1) \ldots p(t_n)J(x) = 0 \qquad (7)$$

и для него составим характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Пусть корень λ_i характеристического уравнения встречается m_i раз, где $i = 1, \ldots, p$, $m_i \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^p m_i = n$.

Теорема 3. *Функционалы*

$$J_{ij}(x) = \left[\int_a^b p(t)x(t)\,dt\right]^{m_i - j} \exp\left[\lambda_i \int_a^b p(t)x(t)\,dt\right]$$
$$(i = 1, \ldots, p; \quad j = 1, \ldots, m_i)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (7).

5. Как и обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнение в функциональных производных второго порядка может быть сведено к уравнению, напоминающему уравнение Риккати.

Функциональным аналогом уравнения Риккати назовем уравнение вида

$$\delta J(x) / \delta x(t) = P(x, t)J^2(x) + Q(x, t)J(x) + R(x, t). \qquad (8)$$

Более общим по сравнению с уравнением (8) будет уравнение

$$\delta J(x) / \delta x(t) = f(J, x, t), \qquad (9)$$

которое исследовал еще П. Леви ([9]).

Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (9) имеет вид

$$\delta f(J, x, t_1) / \delta x(t_2) + [\partial f(J, x, t_1) / \partial J]f(J, x, t_2) = \delta f(J, x, t_2) / \delta x(t_1) +$$
$$+ [\partial f(J, x, t_2) / \partial J]f(J, x, t_1) \qquad (10)$$

для любых $t_1, t_2 \in [a, b]$.

Из (10) немедленно вытекает условие разрешимости уравнения (8).

Для уравнения (8) имеют место теоремы, аналогичные теоремам для обыкновенного уравнения Риккати. Приведем, например, такой результат.

Теорема 4. *Если коэффициенты* $P(x, t)$, $Q(x, t)$ *и производная* $\delta P(x, t_1) / \delta x(t)$ *не зависят от* t, *то уравнение* (8) *можно привести к виду*

$$\delta J_1(x) / \delta x(t) = J_1^2(x) + R_1(x, t). \tag{8'}$$

При этом уравнение (8') *будет вполне разрешимым, если* $R_1(x, t) = \varphi\left[\int\limits_a^b x(t)\,dt\right]$, *где* $\varphi(u)$ — *обычная дифференцируемая функция.*

Фактическое решение уравнения (8) или (8') немедленно вытекает из решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения, причем нужный результат имеет место и для общего уравнения (9) (ср. ([10])).

Теорема 5. *Если уравнение* (9) *вполне разрешимо, то в некотором открытом шаре существует единственное решение уравнения* (9), *удовлетворяющее условию* $J(x_0) = J_0$. *Это решение имеет вид* $\varphi(1, x, x_0, J_0)$, *где* $\varphi(s, x, x_0, z_0)$ *при фиксированных* x *и* x_0 *является решением задачи*

$$dz / ds = b(s, z, x, x_0) \quad (0 \leqslant s \leqslant 1), \qquad z(0) = z_0,$$

причем

$$b(s, z, x, x_0) = \int\limits_a^b f\,[z, s(x - x_0) + x_0, t]\,[x(t) - x_0(t)]\,dt.$$

Заметим в заключение, что все приведенное в этом пункте можно переписать и для уравнения с производной Фреше, а большинство результатов статьи сохраняется для отображений линейного топологического пространства в R.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность Ю. Л. Далецкому за полезные обсуждения.

Львовский политехнический институт

Поступило 14 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Л. Далецкий, УМН, 22, № 4, 3 (1967). [2] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, УМН, 22, № 6, 201 (1967). [3] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, УМН, 23, № 4, 67 (1968). [4] Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, М., 1964. [5] А. И. Перов, ДАН, 159, № 4, 755 (1964). [6] Е. Новиков, УМН, 16, № 2, 135 (1961). [7] В. И. Татарский, УМН, 16, № 4, 179 (1961). [8] М. С. Сявавко, Некоторые вопросы теории уравнений в функциональных производных, Кандидатская диссертация, Львов, 1968. [9] П. Леви, Конкретные проблемы функционального анализа, «Наука», 1967. [10] Ю. Л. Далецкий, РЖМат., № 12, 93 (1968).