Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 1

УДК 538.3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

П. Ш. ФРИДБЕРГ

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЯ НА УЗКОЙ СИЛЬНОИЗЛУЧАЮЩЕЙ ЩЕЛИ

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 21 IV 1970)

1. Пусть два простых объема с бесконечно тонкими и идеально проводящими стенками связаны через узкую сильноизлучающую щель (у.с.щ.), прорезанную далеко (на расстояниях, много больших d) от изломов поверхности (рис. 1).

Поясним смысл введенных определений: а) объем простой, если в отсутствие щели известен бесконечный набор собственных функций дискретного или непрерывного спектра, из которых может быть сконструирована его тензорная функция Грина электрического поля [1]; б) щель сильноизлучающая, если на оси металлизированной щели продольная $H_v(v)$ и поперечная $H_u(v)$ компоненты возбуждающего магнитного поля удовлетворяют условию [2]

$$|H_v(v)| \gtrsim |H_u(v)|; \tag{1}$$

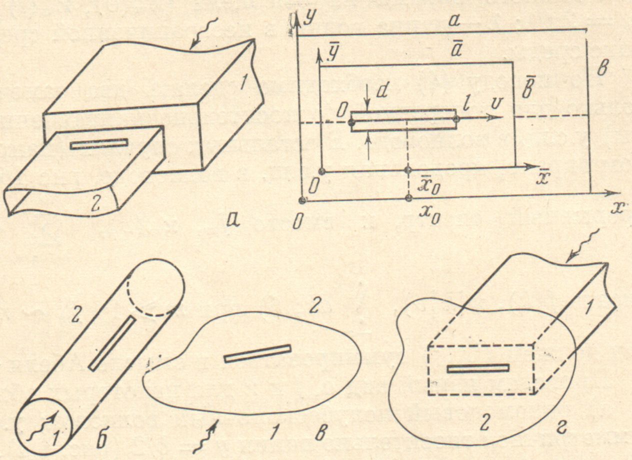

Рис. 1

в) щель узкая, если $d/L \ll 1$, но $\alpha^{-1} \sim \ln L/d \sim 1$ [3], L — характерный размер в задаче.

Считая известными входные адмитансы [1, 3] $\eta(v, v')$ и $\bar{\eta}(v, v')$ сочленяемых объемов, запишем интегральное уравнение для напряжения на у.с.щ. *

$$(\hat{\eta} + \hat{\bar{\eta}})\, U^0 = l^{-1} H_v. \tag{2}$$

Так как найти U^0 не удается, то для отыскания приближенного решения (обозначаемого всюду без индекса нуль) Я. Н. Фельд [4] предложил воспользоваться способом, аналогичным методу Галеркина: если положить

$$U(v) = \sum_{n=1}^{N} U_n \psi_n(v), \tag{3}$$

то (2) можно свести к системе линейных алгебраических уравнений. Функции $\psi_n(v)$ не обязаны [4] обращаться в нуль на концах щели, однако

* Здесь и в дальнейшем используются обозначения

$$\hat{R}x \equiv \frac{1}{l}\int_0^l dv' R(v, v')\, x(v'), \qquad (x, y) = \frac{1}{l}\int_0^l dv\, x(v)\, y(v).$$

Величины с чертой относятся ко второму объему.

обычно (в том числе и в [4]) полагают $\psi_n(v) = \sin n\pi v / l$. Отыскание матричных элементов $(\psi_m, (\hat{\eta} + \hat{\hat{\eta}})\psi_n)$ этой системы весьма трудоемко с вычислительной точки зрения, ибо они выражаются через p-кратные ($p \leqslant 3$) бесконечные суммы (интегралы). Кроме того, в общем случае не удается показать, что $\lim\limits_{N\to\infty} U(v) = U^0(v)$.

2. Свяжем с простым объемом естественную систему координат. Если у.с.щ. прорезана вдоль одной из координатных линий, то ее входной адмитанс может быть [1, 3, 5] представлен в виде

$$\eta(v, v') = \eta_0 \left\{ -\frac{i\alpha^{-1}}{k_0} [\mathscr{L}\delta(v - v')] + \frac{i}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} f_m \varkappa_m^*(v) \varkappa_m(v') \right\}, \quad |\varkappa_m(v)| \leqslant 1, \tag{4}$$

где f_m — известные коэффициенты, выражающиеся в свою очередь через $(p-1)$-кратную бесконечную сумму; $\varkappa_m(v)$ — значение собственной функции данного объема на оси щели ($\varkappa_m(0)$, $\varkappa_m(l) \neq 0$), $\mathscr{L} = k_0{}^2 + d^2/dv^2$; $k_0 = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны в неограниченной среде; η_0 — волновой адмитанс среды.

По поводу (4) необходимо сделать два замечания: а) m дискретно только для поперечной (относительно направления распространения волны) у.с.щ. в волноводе. В остальных случаях (например, у.с.щ. в бесконечном экране, продольная у.с.щ. в волноводе, рис 1*б*, *в*) $m = k$ образует непрерывный спектр, и вместо f_m, $\varkappa_m(v)$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}$ следует соответственно писать $f(k)$, $\varkappa(k|v)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk$; б) при $m \gg 1$ $f_m \sim m^2 \ln m$, и расходящийся ряд должен [1, 3, 5] суммироваться в смысле Абеля — Пуассона.

Приведем явный вид α, f и $\varkappa$ для некоторых объемов [5, 6]:

а) одномодовый полубесконечный волновод; у.с.щ. прорезана в торце симметрично относительно линии $y = b/2$ (рис. 1 *а*).

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{8a}{\pi d} - C\right), \quad \varkappa_m(v) \equiv s_m(v) \equiv \sin\left[\frac{m\pi}{a}\left(v + x_0 - \frac{l}{2}\right)\right],$$

$$f_m = \begin{cases} \dfrac{4l^2\lambda}{a\Lambda^2}\left[\ln\dfrac{4a}{b} - C - Q\left(\dfrac{b}{\Lambda}\right)\right] - iq^2\dfrac{\lambda}{\Lambda}, & m = 1, \\ \dfrac{l^2\lambda}{2a^3}[4\rho_m\sigma_m - \sigma_m \ln\sigma_m], & m \geqslant 2, \end{cases} \tag{5}$$

$$\sigma_m = m^2 - \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2, \quad \rho_m = \sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(n\pi\frac{b}{a}\sigma_m^{1/2}\right), \quad Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2 - x^2}} - \frac{1}{n}\right],$$

$$C = 0{,}577\ldots, \quad \Lambda = \lambda\,[1 - (\lambda/2a)^2]^{-1/2}, \quad q = (2l^2/ab)^{1/2};$$

б) соответствующие выражения для бесконечного волновода тех же размеров с поперечной у.с.щ. на широкой стенке получаются [6] из (5) формальной заменой b на $2b$;

в) у.с.щ. в бесконечном экране (рис. 1*в*)

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{8L}{d} - C\right), \quad \varkappa(k|v) = e^{ikv},$$

$$f(k) = \frac{1}{4\pi^2 k_0}[(k_0^2 - k^2)L^2]\ln[(k^2 - k_0^2)L^2]. \tag{6}$$

3. Введем вместо величин $H_v(v)$ и $U^0(v)$ безразмерные функции $h(v) = I_0^{-1} l H_v(v)$ и $V^0(v) = I_0^{-1}\eta_0 U^0(v)$, I_0 — амплитуда магнитного поля возбуждающей волны. Подстановка (4) в (2) дает

$$2V^0(v) = \frac{k_0\alpha_0}{l}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}[V_m^0 f_m \varkappa_m^*(v) + \bar{V}_m^0 \bar{f}_m \bar{\varkappa}_m^*(v)] + ih(v)\right\}, \quad \alpha_0 = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{\alpha+\bar{\alpha}}, \tag{7}$$

где

$$V_n^0 = (V^0, \varkappa_n), \quad \bar{V}_n^0 = (V^0, \bar{\varkappa}_n). \tag{8}$$

Теперь с помощью функции Грина $G(v, v') = (k_0 \sin k_0 l)^{-1} g(v, v')$, $g(v, 0) = g(v, l) = 0$ оператора $\mathscr{L}$ сводим интегро-дифференциальное уравнение (7) к интегральному уравнению второго рода

$$V^0(v) = -\frac{\alpha_0}{\sin k_0 l}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}[V_m^0 f_m \hat{g}\varkappa_m^* + \bar{V}_m^0 \bar{f}_m \hat{g}\bar{\varkappa}_m^*] + i\hat{g}h\right\}. \tag{9}$$

Важно подчеркнуть, что к а ж д ы й член бесконечной суммы (а также $\hat{g}h$) обращается в нуль на концах щели. Подставляя (9) в (8), приходим к строгой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{\infty}[Y_{mn}^{11} V_m^0 + Y_{mn}^{12}\bar{V}_m^0] = I_n^1, \\ \sum_{m=1}^{\infty}[Y_{mn}^{21} V_m^0 + Y_{mn}^{22}\bar{V}_m^0] = I_n^2.\end{gathered} \tag{10}$$

Ее матричные элементы и правая часть равны

$$\begin{gathered}Y_{mn}^{11} = \delta_{mn}\sin k_0 l + \alpha_0 f_m(\hat{g}\varkappa_m^*, \varkappa_n), \quad Y_{mn}^{12} = \alpha_0 \bar{f}_m(\hat{g}\bar{\varkappa}_m^*, \varkappa_n), \\ Y_{mn}^{21} = \alpha_0 f_m(\hat{g}\varkappa_m^*, \bar{\varkappa}_n), \quad Y_{mn}^{22} = \delta_{mn}\sin k_0 l + \alpha_0 \bar{f}_m(\hat{g}\bar{\varkappa}_m^*, \bar{\varkappa}_n);\end{gathered} \tag{11}$$

$$I_n^1 = -i\alpha_0(\hat{g}h, \varkappa_n), \quad I_n^2 = -i\alpha_0(\hat{g}h, \bar{\varkappa}_n). \tag{12}$$

Заметим, что с помощью матричной символики выражениям (9), (10) можно придать весьма компактную форму.

Решение исходного уравнения (7) непрерывно по параметру $k_0 l$. Использование же функции Грина оператора $\mathscr{L}$ приводит к неопределенности в выражениях (9), (10) при $k_0 l = \nu\pi$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Однако $\lim\limits_{k_0 l \to \nu\pi} V^0(v)$ остается конечным.

Бесконечный ряд выражения (9) сходится абсолютно, ибо его члены убывают как $m^{-2}\ln m$ (согласно теории рядов Фурье при $m \gg 1$ имеем V_m^0, $\hat{g}\varkappa_m \sim m^{-2}$, а $f_m \sim m^2 \ln m$).

Система уравнений (10) существенно отличается от системы, получаемой по методу Галеркина, простотой матричных элементов: $(\psi_m, \hat{\eta}\psi_n)$ есть p-кратная бесконечная сумма, а Y_{mn} — $(p-1)$-кратная. Более того, так как $\varkappa_m(v)$ и $\bar{\varkappa}_m(v)$ являются значениями собственных функций сочленяемых объемов на оси щели, то коэффициенты V_m^0 и $\bar{V}_m^0$ оказываются пропорциональными соответствующим элементам матрицы рассеяния S. Следовательно, выражение (10) имеет глубокий физический смысл: его можно трактовать как строгую систему линейных уравнений для определения элементов $\|S\|$.

4. Найти строгое решение (10) вряд ли возможно. Для отыскания приближенного решения в (9) следует сохранить N членов. Выбор числа N должен обеспечить хорошую аппроксимацию ядра интегрального уравнения, поэтому необходимо требовать $N \gg s$, где s — количество осцилляций возбуждающего поля на длине щели.

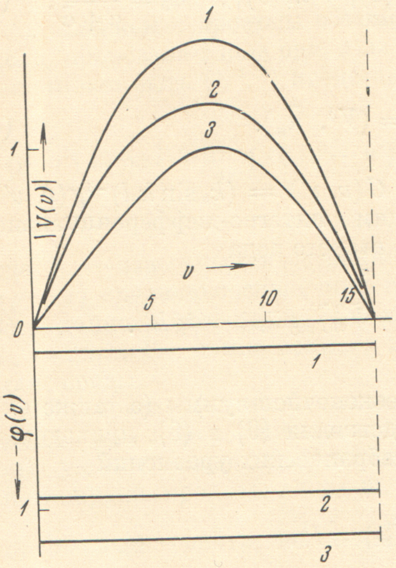

Рис. 2

В качестве примера рассмотрим диафрагму в одномодовом ($2a > \lambda > 2b$) волноводе (рис. 1a; $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$, $x_0 = \bar{x}_0$). В этом случае ([6]) $h(v) = 2qs_1(v)$.

Падающая в первый канал H_{10}-волна создаст на щели напряжение

$$V(v) \equiv |V(v)| e^{i\varphi(v)} = -\frac{\alpha}{\sin k_0 l}\left[\sum_{m=1}^{N} V_m f_m \hat{g} s_m + iq\hat{g}s_1\right]. \quad (13)$$

Коэффициенты V_m определяются из системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{N} Y_{mn} V_m = I_n, \quad 1 \leqslant n \leqslant N, \quad (14)$$

в которой

$$Y_{mn} = \delta_{mn} \sin k_0 l + \alpha f_m (\hat{g s_m}, s_n),$$
$$I_n = -i\alpha q(\hat{g} s_1, s_n), \quad (15)$$

а α, f_m и s_m определены в (5).

С помощью формул возбуждения волноводов ([1]) находим элементы матрицы рассеяния (номера каналов указаны на рис. 1a)

$$S_{12} = S_{21} = q\frac{\lambda}{\Lambda} V_1, \quad S_{11} = S_{22} = S_{12} - 1 \quad (16)$$

и еще раз убеждаемся, что S_{12} пропорционально V_1.

Результаты численного расчета при $N = 30$ для $a = 23$, $b = 10$, $l = 15$, $d = 1$, *1* — $\lambda = 2l$, $x_0 = a/2$; *2* — $\lambda = 5/2l$, $x_0 = a/2$, *3* — $\lambda = 5/2l$, $x_0 = l/2$ приведены на рис. 2.

В заключение приношу глубокую признательность А. В. Гапонову-Грехову и Я. Н. Фельду за плодотворное обсуждение.

Поступило
2 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Ш. Фридберг, I Всесоюзн. школа-семинар по дифракции и распространению волн, тексты лекций, Москва — Харьков, 1968. [2] П. Ш. Фридберг, ДАН, 190, № 2 (1970). [3] И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, ДАН, 158, № 5 (1964); Радиотехника и электроника, 10, в. 2 (1965). [4] Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, 2, М., 1959. [5] П. Ш. Фридберг, Сборн. аннотаций IV всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Харьков, 1967. [6] И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 11, в. 5 (1966).