Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. МАЗЬЯ, В. П. ХАВИН

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛОГ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА И МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА (p, l)-ЕМКОСТИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 20 III 1970)

Во многих вопросах анализа массивность множества E, расположенного в эвклидовом пространстве R^n, естественно характеризовать с помощью величины $\inf\{\|\nabla_l\varphi\|_p^p : \varphi\in\mathcal{U}(E)\}$, где $\|\ \|_p$ — норма в $L_p = L_p(R\ )$, $\mathcal{U}(E) = \{\varphi\in\mathcal{D}: \varphi(x)\geqslant 1$ при любом $x\in E\}$, $\mathcal{D}$ — множество всех функций класса $C^\infty(R^n)$ с компактными носителями и $\nabla_l\varphi$ — градиент порядка l функции φ (см., например, ([1–14])). Эта величина, называемая (p, l)-емкостью множества E и обозначаемая ниже через $\mathrm{cap}_{p,l}(E)$, при $p = 2$, $l = 1$ и $n \geqslant 3$ совпадает с классической емкостью, изучаемой в теории потенциала (см. ([15–17])).

В этой работе предлагается обобщение ньютоновского потенциала, которое, на наш взгляд, хорошо приспособлено к изучению функции $\mathrm{cap}_{p,l}$. С помощью этого обобщения удалось найти метрические условия, необходимые и (отдельно) достаточные для обращения (p, l)-емкости в нуль (см. ниже п. 5). При $p = 2$ эти условия совпадают с известными условиями теории потенциалов М. Рисса (см. ([15]), гл. III, теоремы 3.13 и 3.14; ([16]), § IV). Теоремы п. 5 уточняют некоторые результаты статей ([6, 7, 14]).

Всюду ниже мы будем предполагать, что $p > 1$, l — положительное (необязательно целое) число и что $pl < n$.

1. Функция $c_{p,l}$ и пространство $\mathcal{L}_p^l$. Для функции φ класса $\mathcal{D}$ положим $\Lambda^l_{x\to y}\varphi = F^{-1}_{\xi\to y}(|\xi|^l F_{x\to\xi}(\varphi))$, где F — преобразование Фурье. Введем в $\mathcal{D}$ норму, полагая $\|\varphi\|_{p,l} = \|\Lambda^l\varphi\|_p$. Зададим на системе всех компактных подмножеств пространства R^n емкость $c_{p,l}$:

$$K \xrightarrow{c_{p,l}} \inf\{\|\varphi\|^p_{p,l} : \varphi\in\mathcal{U}(K)\}.$$

Отметим, что отношение $c_{p,l}(K)$ к $\mathrm{cap}_{p,l}(K)$ ограничено сверху и отделено от нуля равномерно относительно всех компактных множеств $K\subset R^n$, так как при целом l норма $\|\ \|_{p,l}$ на $\mathcal{D}$ эквивалентна норме $\varphi\to\|\nabla_l\varphi\|_p$. Исходя из функции множества $c_{p,l}$, мы обычным способом определим внутреннюю и внешнюю емкости $\underline{c}_{p,l}(E)$ и $\overline{c}_{p,l}(E)$ для любого подмножества E пространства R^n (см. ([15–18])). Если E — аналитическое (и, в частности, борелевское) множество, то $\overline{c}_{p,l}(E) = \underline{c}_{p,l}(E)$. В этом случае вместо $\overline{c}_{p,l}(E)$ будем писать $c_{p,l}(E)$.

Пополнение пространства $\mathcal{D}$ относительно нормы $\|\ \|_{p,l}$ обозначим через $\mathcal{L}_p^l$. Это пространство можно естественным образом вложить в L_s, где $s = np(n-pl)^{-1}$. Будем считать, что оператор $\Lambda^l: \mathcal{D}\to L_p$ продолжен по непрерывности на все пространство $\mathcal{L}_p^l$.

Лемма 1. *Оператор Λ^l изометрически отображает $\mathcal{L}_p^l$ на L_p. Обратный к Λ^l оператор (обозначаемый через Λ^{-l}) задается равенством*

$$(\Lambda^{-l}f)(x) = c\int\frac{f(y)}{|x-y|^{n-l}}\,dy \quad (x\in R^n)$$

(c — константа, зависящая лишь от n, p, l; интеграл берется по R^n).

2. Энергия. Легко понять, что каждый функционал $T \in (\mathscr{L}_p^l)^*$ можно отождествить с некоторой обобщенной функцией в смысле Шварца. Энергией обобщенной функции $T \in (\mathscr{L}_p^l)^*$ назовем число

$$\mathscr{E}_{p,l}(T) \overset{\text{def}}{=} \| T \|^q_{(\mathscr{L}_p^l)^*}, \text{ где } q = p(p-1)^{-1}.$$

Словом мера мы будем всюду ниже называть неотрицательную счетно-аддитивную локально конечную функцию, заданную на борелевском σ-кольце пространства R^n. Отождествляя функционал $\varphi \to \int \varphi d\mu$ $(\varphi \in \mathscr{D})$ с мерой μ, мы можем сформулировать следующий результат.

Лемма 2. *Мера μ есть обобщенная функция с конечной (p, l)-энергией тогда и только тогда, когда*

$$\int \left[\int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-l}} \right]^q dx < +\infty \quad \left(q = \frac{p}{p-1} \right).$$

Множество всех таких мер (обозначаемое ниже через $\mathfrak{M}_{p,l}$) замкнуто в пространстве $(\mathscr{L}_p^l)^*$.

Последнее утверждение при $p = 2$ и $l = 1$ $(n \geqslant 3)$ превращается в известную теорему А. Картана (см. ([15]), стр. 117, теорема 1.18).

3. Потенциалы. Пусть $T \in (\mathscr{L}_p^l)^*$. Положим

$$U_{p,l}^T = \Lambda^{-l} (|(\Lambda^{-l})^* T|^{(2-p)/(p-1)} (\Lambda^{-l})^* T)$$

(звездочка обозначает переход к сопряженному оператору). Легко видеть, что $U_{p,l}^T \in \mathscr{L}_p^l$. Функцию $U_{p,l}^T$ будем называть (p, l)-потенциалом обобщенной функции T. Заметим, что при $p = 2$ мы возвращаемся к известному определению потенциала Рисса обобщенной функции (([15]), стр. 434). Если $\mu \in \mathfrak{M}_{p,l}$, то при почти всех $x \in R^n$

$$U_{p,l}^{\mu}(x) = c \int \left[\int \frac{d\mu(z)}{|z-y|^{n-l}} \right]^{1/(p-1)} \frac{dy}{|y-x|^{n-l}}.$$

Отметим еще выражение для энергии меры $\mu \in \mathfrak{M}_{p,l}$:

$$\mathscr{E}_{p,l}(\mu) = \int U_{p,l}^{\mu} d\mu.$$

Лемма 3. *Образ пространства $(\mathscr{L}_p^l)^*$ при отображении $T \to U_{p,l}^T$ равен $\mathscr{L}_p^l$.*

Теорема 1 (грубый принцип максимума). *Пусть мера μ такова, что $U_{p,l}^{\mu}(x) \leqslant M$ при любом x из (замкнутого) носителя меры μ. Тогда при любом $x \in R^n$ справедливо неравенство $U_{p,l}^{\mu}(x) \leqslant cM$, где c зависит лишь от n, p и l.*

Теорема 2. *Пусть μ — мера с компактным носителем. Если $U_{p,l}^{\mu}(x) < +\infty$ при μ-почти всех $x \in R^n$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое компактное множество $K \subset R^n$, что (p, l)-потенциал сужения меры μ на множество K непрерывен в R^n и $\mu(R^n \setminus K) < \varepsilon$.*

4. Емкостное распределение. Пусть K — компактное множество в R^n и пусть $\{\varphi_m\}$ — какая-нибудь последовательность, минимизирующая норму пространства $\mathscr{L}_p^l$ на множестве $\mathscr{U}(K)$: $\lim \|\varphi_m\|^p_{p,l} = c_{p,l}(K)$, $\varphi_m \in \mathscr{U}(K)$, при всех m. Из равномерной выпуклости пространства $\mathscr{L}_p^l$ следует, что эта последовательность сходится в $\mathscr{L}_p^l$ к некоторой функции $V_K \in \mathscr{L}_p^l$, которая не зависит от выбора последовательности $\{\varphi_m\}$.

Теорема 3. *Функция V_K есть (p, l)-потенциал некоторой меры $\mu_K \in \mathfrak{M}_{p,l}$, сосредоточенной на K и такой, что:*

1) $U_{p,l}^{\mu_K}(x) \geqslant 1$ *при любом* $x \in K$ *за исключением множества точек нулевой емкости* $c_{p,l}$;

2) $U_{p,l}^{\mu_K}(x) \leqslant 1$ *при любом* $x \in \operatorname{supp} \mu_K$;

3) $\mu_K(K) = \int U_{p,l}^{\mu_K} d\mu_K = c_{p,l}(K)$.

Из этой теоремы нетрудно вывести, что мера μ_K и емкость $c_{p,l}(K)$ суть решения некоторых экстремальных задач, аналогичных классическим ([15], определение на стр. 169, определение Валле-Пуссена на стр. 176). Можно показать, что аналогично классической теории потенциала для любого ограниченного подмножества E пространства R^n существуют «внешнее» и «внутреннее» емкостные распределения, совпадающие друг с другом, если E — аналитическое множество (см. [15], гл. II, теоремы 2.6 и 2.7).

5. Метрические характеристики множеств нулевой (p, l)-емкости. Обозначим через $m_h(E)$ h-меру множества E по Хаусдорфу (см. [15], стр. 244—245). Если $h(t) = t^\alpha$, то вместо $m_h(E)$ мы будем писать $m_\alpha(E)$.

Теорема 4. *Предположим, что*

$$\int_0^1 \left(\frac{h(s)}{s^{n-lp}}\right)^{1/(p-1)} \frac{ds}{s} < +\infty.$$

Если E — борелевское множество ($E \subset R^n$), для которого $m_h(E) > 0$, то $c_{p,l}(E) > 0$.

Для доказательства этой теоремы мы проверяем, что потенциал меры, сосредоточенной на E, ограничен (ср. [16], стр. 29).

Теорема 5. *Если $m_{n-lp}(E) < +\infty$ (E — борелевское множество в R^n), то $c_{p,l}(E) = 0$.*

Рассмотрим теперь n-мерное канторово множество e, равное пересечению убывающей последовательности множеств $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где e_k равно сумме 2^{kn} замкнутых кубов со стороной l_k.

Теорема 6. *Условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn/(p-1)} l_k^{-(n-pl)/(n-1)} = +\infty$$

необходимо и достаточно для того, чтобы множество e имело нулевую емкость $c_{p,l}$.

Эта теорема обобщает теорему Оцука (см. [16], стр. 31). При доказательстве теоремы 7 используется следующая лемма, обобщающая одну теорему Неванлинна (см. [16], стр. 30) и основана на оценке (p, l)-потенциалов некоторых мер.

Лемма 4. *Если при любом $r > 0$ борелевское множество $E \subset R^n$ можно покрыть $A(r)$ замкнутыми шарами радиусов, не превосходящих r, и если*

$$\int_0 [A(r) r^{n-lp}]^{-1/(p-1)} \frac{dr}{r} = +\infty,$$

то $c_{p,l}(E) = 0$.

6. Стирание особенностей аналитических функций. Пусть D — область на расширенной комплексной плоскости, содержащая ∞, и пусть $H_p(D)$ — множество всех голоморфных в D функций, принадлежащих $L_p(D)$. Нетрудно проверить, что $H_p(D)$ состоит лишь из нулевой функции тогда и только тогда, когда $c_{q,1}(E) = 0$. Поэтому справедливо следующее утверждение, дополняющее одну теорему Карлесона ([16], стр. 73).

Теорема 7. *Пусть $p > 2$. Множество $H_p(D)$ содержит только нулевую функцию, если существует такая функция h, что $m_h(R^2 \setminus D) > 0$, и*

$$\int_0^1 \left[\frac{h(t)}{t}\right]^{p-1} dt < +\infty.$$

Подобным образом можно уточнить некоторые известные теоремы о стирании особенностей решений эллиптических уравнений, формулируемые в терминах мер Хаусдорфа (см. ([5], [7], [16])).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
6 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Aronszajn, K. T. Smith, Ann. Inst. Fourier, **11**, 385 (1961). [2] N. Aronszajn, F. Mulla, P. Szeptycki, ibid., **13**, 211 (1963). [3] В. Г. Мазья, ДАН, **140**, № 2, 299 (1961). [4] J. Serrin, Acta Math., **111**, 247 (1964). [5] J. Serrin, Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, № 1, 67 (1964). [6] H. Wallin, Ark. Mat., **5**, 331 (1964). [7] W. Littman, Ark. Mat., 7, № 1, 1 (1966). [8] W. Littman, Bull. Am. Math. Soc., 73, № 6, 862 (1967). [9] В. Г. Мазья, Сибирск. матем. журн., **6**, № 1, 127 (1965). [10] В. Г. Мазья, Тр. симпозиума по теоремам вложения, 1966 г., Баку, 1970. [11] В. Г. Мазья, В. П. Хавин, Вестн. ЛГУ, **13**, 62 (1968). [12] В. Г. Мазья, В. П. Хавин, Проблемы матем. анализа, в. 2, Л., 1969, стр. 153. [13] Ю. Г. Решетняк, Сибирск. матем. журн., 7, № 3, 629 (1967). [14] Ю. Г. Решетняк, Там же, **10**, № 5, 1109 (1969). [15] Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, М., 1966. [16] L. Carleson, Selected Problems on Exceptional Sets, Princeton, 1967. [17] М. Брело, Основы классической теории потенциала, М., 1964. [18] G. Choquet, Ann. Inst. Fourier, **5**, 131 (1955).