Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 5

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

В. И. АРНАУТОВ

НЕДИСКРЕТНАЯ ТОПОЛОГИЗУЕМОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ КОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 III 1970)

Очевидно, что в любом кольце можно тривиальным образом ввести топологию (дискретную топологию). В конечных кольцах это единственно возможная топология. Вопрос о возможности ввести в некоторых бесконечных кольцах недискретную топологию рассматривался в работах ([1], [3], [4], [6]). В настоящей работе доказывается, что всякое бесконечное коммутативное кольцо допускает недискретную топологизацию.

Теорема 1. *Если коммутативное кольцо R обладает бесконечным ниль-идеалом, то R обладает таким бесконечным идеалом I, что $I^2=0$.*

Лемма 1. *Если примарная группа G по простому числу p содержит только конечное число элементов порядка p, то G является конечной прямой суммой конечных циклических групп и групп типа p^∞.*

Лемма 2. *Если коммутативное кольцо R обладает таким бесконечным идеалом I, что $I^2=0$ и $p^kI=0$ для некоторой степени k простого числа p, то R допускает недискретную топологизацию, в которой I является открытым идеалом.*

Доказательство. По первой теореме Прюфера (см. ([5]), стр. 146) I как группа разлагается в прямую сумму циклических подгрупп G_α, т. е. $I=\sum\limits_{\alpha\in\Omega} G_\alpha$.

Если S — конечное подмножество в Ω, то возьмем $N_S=\sum\limits_{\alpha\notin S} G_\alpha$. Для любых конечных подмножеств $S\subset\Omega$ и $M\subset R$ определим множество $V_{M,S}=\{a\in N_S\,|\,aM\subseteq N_S\}$.

Легко проверить, что совокупность подмножеств $V_{M,S}$ может быть взята за базис окрестностей нуля, чтобы превратить R в недискретное топологическое кольцо.

Лемма 3. *Если коммутативное кольцо R обладает таким ненулевым идеалом I, что $I^2=0$ и I, как группа, является прямой суммой конечного числа групп типа p^∞ для некоторого простого числа p, то R допускает недискретную топологизацию, в которой I — открытый идеал.*

Доказательство. Пусть $I=\sum\limits_{i=1}^{n} G_i$, где G_i — группы типа p^∞. Тогда существуют такие элементы $b_{ij}\in G$, $j=1,2,\ldots$; $i=1,2,\ldots,n$, что $pb_{ij+1}=b_{ij}$ и $pb_{i1}=0$. Очевидно, что любой элемент $a\in I$ может быть записан единственным образом в виде конечной суммы $\sum\limits_{i,j}\alpha_{ij}b_{ij}$, где α_{ij} — целые числа, причем $|\alpha_{ij}|\leqslant p/2$. Элементу $a=\sum\limits_{i,j}\alpha_{ij}b_{ij}$ поставим в соответствие число $\zeta(a)=\sum\limits_{i,j}\frac{|\alpha_{ij}|}{p^j}$.

Для каждого конечного подмножества $A\subset R$ и любого натурального числа m определим множество

$$V_{A,m}=\{a\in I\,|\,\zeta(a)\leqslant 1/2^m \text{ и } \zeta(ab)\leqslant 1/2^m \text{ для любого } b\in A\}.$$

Доказывается, что совокупность $\{V_{A,m} \mid A \subset R,\ m = 1, 2, \ldots\}$ можно взять за базис окрестностей нуля, чтобы превратить R в недискретное топологическое кольцо.

Напомним, что подгруппа H называется плотно вложенной в группу G, если H имеет ненулевое пересечение с любой ненулевой подгруппой группы G.

Замечание. Очевидно, что в любой ненулевой группе G без кручения содержится бесконечная плотно вложенная редуцированная подгруппа H.

Лемма 4. *Если коммутативное кольцо R обладает таким ненулевым идеалом I, что $I^2 = 0$ и I является группой без кручения, то R допускает недискретную топологизацию, в которой I — открытый идеал.*

Доказательство. Пусть H — плотно вложенная редуцированная подгруппа в аддитивной группе идеала I. Для любого конечного подмножества $M \subset R$ и любого натурального числа n определим множество $V_{M,n} = \{a \in nH \mid aM \subseteq nH\}$.

Легко проверяется, что совокупность $\{V_{M,n} \mid M \subset R,\ n = 1, 2, \ldots\}$ может быть взята за базис окрестностей нуля, чтобы превратить R в недискретное топологическое кольцо.

Лемма 5. *Если I — идеал кольца R и B — наибольшая полная подгруппа аддитивной группы идеала I, то B — идеал в R.*

Лемма 6. *Пусть I — идеал кольца R и A — множество всех элементов конечного порядка из I. Если A имеет конечную характеристику и R/A допускает недискретную топологизацию, в которой I/A является открытым идеалом, то и R допускает недискретную топологизацию, в которой I — открытый идеал.*

Доказательство. Пусть n — характеристика кольца A и $\{\overline{V}_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — базис окрестностей нуля в кольце R/A. Если φ — канонический гомоморфизм кольца R на R/A, то возьмем $U_\alpha = n\varphi^{-1}(\overline{V}_\alpha)$.

Очевидно, что совокупность множеств U_α, $\alpha \in \Omega$, может быть взята за базис окрестностей нуля, чтобы превратить R в недискретное топологическое кольцо, причем I будет открытым идеалом.

Теорема 2. *Всякое коммутативное кольцо R, содержащее бесконечный ниль-идеал I, допускает недискретную топологизацию, в которой I является открытым идеалом.*

Доказательство. По теореме 1 R обладает таким бесконечным идеалом I_0, что $I_0^2 = 0$. Если A — множество всех элементов из I_0, имеющих конечный порядок, то A — идеал в R.

Рассмотрим два случая:

I. A — конечный идеал. Тогда $nA = 0$ для некоторого числа n. Так как $\overline{R} = R/A$ содержит такой бесконечный идеал $\overline{I}_0 = I_0/A$, что $\overline{I}_0^2 = 0$ и $\overline{I}_0$ не содержит элементов конечного порядка, то по лемме 4 $\overline{R}$ допускает недискретную топологизацию, в которой $\overline{I}_0$ — открытый идеал. Тогда, по лемме 6, R допускает недискретную топологизацию, в которой I_0 — открытый идеал.

II. A — бесконечный идеал. Пусть $\sum\limits_i C_i$ — разложение A в прямую сумму идеалов C_i, аддитивная группа каждого из которых примарна по некоторому простому числу p_i. Если сумма $\sum\limits_i C_i$ содержит бесконечное число слагаемых, то совокупность идеалов $V_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} C_i$ задает некоторую недискретную топологию в R. Пусть $A = \sum\limits_{i=1}^{r} C_i$, тогда некоторое C_{i_0} бесконечно. Если C_{i_0} содержит бесконечное число элементов порядка p_{i_0}, то, по лемме 2, R допускает недискретную топологизацию, в которой I — открытый идеал. Если же C_{i_0} содержит только конечное число элементов порядка p_{i_0}, то из леммы 1 и 5 следует, что R обладает таким ненулевым идеалом B, что $B \subseteq I_0$ и аддитивная группа идеала B является конечной прямой суммой групп типа p^∞. По лемме 3, R допускает недискретную топологизацию, в которой I — открытый идеал. Этим теорема доказана.

Лемма 7. *Если коммутативное кольцо R обладает бесконечным идеалом без нильпотентных элементов, то R допускает недискретную топологизацию.*

Доказательство. Если R обладает таким бесконечным идеалом I, что в I не содержится минимальных идеалов кольца R, то существует такая убывающая трансфинитная последовательность ненулевых идеалов $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ в R, что $\bigcap\limits_\alpha I_\alpha = 0$. Очевидно, что совокупность идеалов I_α задает недискретную топологию в R.

Пусть теперь любой идеал кольца R содержит минимальный идеал кольца R и пусть I_1 — некоторый бесконечный идеал без нильпотентных элементов в R. Если I_1 удовлетворяет условию минимальности для идеалов, то I_1 является конечной прямой суммой полей A_i. Так как I_1 — бесконечный идеал, то некоторое A_{i_0} — бесконечное поле. Согласно (^{6}), в A_{i_0} можно определить недискретную топологию. Из того, что $R = A_{i_0} \oplus B$, следует, что и в R можно определить недискретную топологию. Если же I_1 не удовлетворяет условию минимальности, то существует такое бесконечное число полей $A_1, A_2, \ldots$, что $A_i \subset I_1$ и A_i — идеалы в R. Тогда совокупность идеалов $V_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} A_i$ задает некоторую недискретную топологию в R.

Лемма 8. *Если бесконечное коммутативное кольцо R конечной характеристики содержит только конечное число нильпотентных элементов и в любом ненулевом идеале содержится ненулевой нильпотентный элемент, то R допускает недискретную топологизацию.*

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что характеристика кольца R есть степень простого числа p. Для любого подмножества $S \subseteq R$ через S^* будем обозначать аннулятор множества S в R.

Если I — множество всех нильпотентных элементов кольца R, то I — конечный идеал, и, значит, $I^{p^k} = 0$ для некоторого числа k. Рассмотрим множество $M = \{a \in R \mid \{a\}^* \cap C$ не $\subseteq I$ для любого не нильпотентного идеала C кольца R, содержащегося в $I^*\}$. Для любого конечного подмножества $Q \subset M$ определим множество $V_Q = \left\{\sum d_i^{p^k} \mid d_i \in Q^*, \quad pd_i = 0\right\}$. Можно проверить, что совокупность множеств V_Q $Q \subset M$, задает некоторую недискретную топологию в R.

Лемма 9. *Всякое бесконечное коммутативное кольцо R конечной характеристики, содержащее только конечное число нильпотентных элементов, допускает недискретную топологизацию.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех идеалов в R, не содержащих нильпотентных элементов, и A — некоторый максимальный идеал в $\mathfrak{R}$. Если A — бесконечный идеал, то, по лемме 7, R допускает недискретную топологизацию. Если же A — конечный идеал, то A обладает единицей. Тогда $R = A \oplus B$. Так как A — максимальный идеал в $\mathfrak{R}$, то всякий идеал кольца B содержит ненулевой нильпотентный элемент. По лемме 8, B допускает недискретную топологизацию. Тогда и в R можно определить недискретную топологию.

Теорема 3. *Всякое бесконечное коммутативное кольцо R допускает недискретную топологизацию.*

Доказательство. Если R содержит бесконечное число нильпотентных элементов, то, по теореме 2, R допускает недискретную топологизацию.

Пусть теперь R содержит только конечное число нильпотентных элементов и A — множество всех элементов конечного порядка кольца R. Рассмотрим два случая:

I. A имеет конечную характеристику. Если $A = R$, то, по лемме 9, R допускает недискретную топологизацию. Если $A \neq R$, то из теоремы 2 и лемм 7 и 8 следует, что R допускает недискретную топологизацию.

II. A не имеет конечной характеристики. Пусть $\sum_i G_i$ — разложение аддитивной группы идеала A на примарные подгруппы G_i по простым числам p_i. Тогда G_i — идеалы в R. Из того что R содержит только конечное число нильпотентных элементов, следует, что каждое G_i имеет конечную характеристику. Тогда ΣG_i содержит бесконечное число слагаемых. Очевидно, что совокупность идеалов $V_n = \sum_{i=n}^{\infty} G_i$ задает некоторую недискретную топологию в R. Этим теорема полностью доказана.

Институт математики
с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
6 III 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Арнаутов, ДАН, 191, № 4 (1970). [2] L. Fuchs, Abelian Groups, Budapest, 1958. [3] M. Hochster, Proc. Am. Math. Soc., 21, № 2, 357 (1969). [4] J. O. Kiltinen, Trans. Am. Math. Soc., 134, № 1, 149 (1968). [5] А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», 1968. [6] А. Ф. Мутылин, Матем. заметки, 5, № 2, 161 (1969).