

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, В. С. ЛОЩИННИН

**О НАХОЖДЕНИИ ПОЛОЖЕНИЙ ЗВЕНА ПРИВЕДЕНИЯ,  
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ  
ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО  
АГРЕГАТА**

1. В работе (1) было указано на важность вопроса о нахождении тех положений звена приведения машинного агрегата, в которых наиболее существенным оказывается влияние сил инерции начального движения на звенья машины по сравнению с силами инерции перманентного движения в смысле Н. Е. Жуковского (2). В этих положениях характеристический критерий  $\chi_{\xi}(\varphi)$   $\xi$ -периодического предельного режима  $T = T_{\xi}(\varphi)$  движения машинного агрегата (3), выражающий закон распределения инерционных сил между указанными движениями, принимает экстремальные значения.

В данной статье мы хотим остановиться на возможных способах отыскания указанных положений звена приведения, так как они являются расчетными при оценке тех дополнительных динамических нагрузок на звенья машины, которые вызываются инерционными силами начального движения.

Следуя терминологии и обозначениям, принятым в статье (3), уравнение движения машинного агрегата запишем в форме

$$dT / d\varphi = M(\varphi, T), \quad (1)$$

предполагая, что:

1°. Приведенный момент  $M(\varphi, T)$  всех действующих сил является функцией, определенной и непрерывной в полосе

$$0 \leq T \leq T, \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad (2)$$

где  $T$  — максимально возможное значение кинетической энергии машинного агрегата, которое ему могут сообщить действующие силы.

2°.  $M(\varphi, 0) > 0$ ,  $M(\varphi, T) \leq 0$ .

3°. Крутизна приведенного момента всех действующих сил непрерывна и отрицательна в полосе (2),  $M_T'(\varphi, T) < 0$ .

4°. Приведенный момент  $M(\varphi, T)$  имеет период  $\xi$  относительно угла поворота  $\varphi$ :  $M(\varphi + \xi, T) = M(\varphi, T)$ .

Приведенный момент инерции масс всех звеньев будем считать функцией угла поворота звена приведения,  $I = I(\varphi)$ .

В рассматриваемых условиях крутизна приведенного момента всех действующих сил в полосе (2) ограничена снизу и сверху некоторыми отрицательными константами

$$-\lambda_2 \leq M_T'(\varphi, T) \leq -\lambda_1 \quad (0 < \lambda_1 \leq \lambda_2). \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\tau_* = \inf_{0 \leq \varphi < \xi} \tau(\varphi), \quad \tau^* = \sup_{0 \leq \varphi < \xi} \tau(\varphi), \quad (4)$$

где  $T = \tau(\varphi)$  — инерциальная кривая движения машинного агрегата (4).

2. При сделанных предположениях существует и притом единственный  $\xi$ -периодический предельный режим  $T = T_{\xi}(\varphi)$  движения машинного агре-

гата, целиком содержащийся в полосе устойчивости,

$$\tau_* \leq T_1(\varphi) \leq \tau^*, \quad -\infty < \varphi < +\infty. \quad (5)$$

Рассмотрим ему соответствующий логарифм

$$j(\varphi) = \ln T_1(\varphi) / I(\varphi), \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad (6)$$

нормированной кинетической энергии машинного агрегата.

Учитывая <sup>(5)</sup>, характеристический критерий  $\chi_1(\varphi)$  периодического предельного режима  $T = T_1(\varphi)$  движения машинного агрегата представим в виде

$$\chi_1(\varphi) = [\ln T_1(\varphi) / I(\varphi)]_{\varphi'} = f'(\varphi). \quad (7)$$

Поэтому

$$d\chi_1(\varphi) / d\varphi = [\ln T_1(\varphi) / I(\varphi)] = f''(\varphi). \quad (8)$$

Из полученных соотношений непосредственно следует, что стационарные точки характеристического критерия  $\chi_1(\varphi)$  совпадают с критическими точками второго порядка логарифма нормированной кинетической энергии машинного агрегата, которую он развивает в периодическом режиме движения.

В промежутках изменения угла поворота  $\varphi$  звена приведения, в которых кривая (6) направлена вогнутостью вверх (вниз), характеристический критерий  $\chi_1(\varphi)$  возрастает (убывает).

В тех критических точках второго порядка кривой (6), которые являются точками перегиба, характеристический критерий  $\chi_1(\varphi)$  имеет локальные экстремумы. При этом в точках перегиба, в которых логарифм нормированной кинетической энергии изменяет направление вогнутости вверх (вниз) на направление вогнутости вниз (вверх), характеристический критерий  $\chi_1(\varphi)$  имеет локальный максимум (минимум).

Следовательно, положения звена приведения, в которых силы инерции, вызванные неравномерностью хода машины, будут оказывать на ее звенья наиболее существенное влияние по отношению к силам инерции перманентного движения, могут быть найдены по точкам перегиба логарифма (6) нормированной кинетической энергии.

В тех точках кривой (8), где она пересекает ось  $O\varphi$  снизу вверх (сверху вниз), характеристический критерий  $\chi_1(\varphi)$  периодического предельного режима  $T = T_1(\varphi)$  имеет локальные минимумы (максимумы).

3. Полученные выводы в интегрируемых случаях проверяются непосредственно.

В качестве примера можно рассмотреть вертикальный цилиндрический ротор, движение которого описывается уравнением

$$I d\omega / dt = a + b \sin \varphi - k\omega^2, \quad (9)$$

где  $I$  — момент инерции ротора относительно оси вращения;  $M_{\pi} = a + b \sin \varphi$  ( $a > b > 0$ ),  $M_c = k\omega^2$  — соответственно момент движущих сил и сил сопротивлений, приложенных к ротору.

Если ввести кинетическую энергию  $T = I\omega^2 / 2$  ротора, то уравнение его движения можно записать в виде

$$\frac{dT}{d\varphi} = a + b \sin \varphi - \frac{2k}{I} T. \quad (10)$$

Периодический предельный режим движения ротора представим в форме

$$T_{\pi\pi}(\varphi) = \frac{Ia}{2k} + \frac{Ib}{\sqrt{4k^2 + I^2}} \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (11)$$

где  $\varphi_0 = \pi - \arctg 2k / I$ .

Ограничиваясь промежутком  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , нетрудно убедиться, что точки

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \arccos \frac{2bk}{a\sqrt{4k^2+I^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2k}{I}, \\ \varphi_2 &= 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{2k}{I} - \arccos \frac{2bk}{a\sqrt{4k^2+I^2}}\end{aligned}\quad (12)$$

являются точками перегиба логарифма

$$f(\varphi) = \ln \frac{T_{2\pi}(\varphi)}{I} = \ln \left[ \frac{a}{2k} + \frac{b}{\sqrt{4k^2+I^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \quad (13)$$

нормированной кинетической энергии ротора.

В первой из них характеристический критерий  $\chi_{2\pi}(\varphi)$  периодического режима движения ротора имеет максимум, а во второй — минимум, равные соответственно

$$\begin{aligned}\chi_{2\pi}(\varphi_1) &= 2bk / \sqrt{a^2(4k^2+I^2) - 4b^2k^2}, \\ \chi_{2\pi}(\varphi_2) &= -2bk / \sqrt{a^2(4k^2+I^2) - 4b^2k^2}.\end{aligned}\quad (14)$$

При числовых данных  $I = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $a = 90 \text{ нм}$ ,  $b = 40 \text{ нм}$ ,  $k = 0,1 \text{ нм}\cdot\text{сек}^2$  эти результаты иллюстрируются на рис. 1. Для удобства график логарифма нормированной кинетической энергии смещен параллельно самому себе вниз на 6 единиц из его действительного положения.

4. В общем случае периодический предельный режим  $T = T_{\xi}(\varphi)$  движения машинного агрегата не вычисляется в конечном виде с помощью квадратур.

В этой связи, исходя из произвольно выбираемой непрерывной  $\xi$ -периодической функции  $T_1(\varphi)$ , удовлетворяющей неравенству

$$\tau_* \leq T_1(\varphi) \leq \tau^*, \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad (15)$$

построим функциональную последовательность  $T_k(\varphi)$  по рекуррентному закону

$$\begin{aligned}T_{k+1}(\varphi) &= \frac{e^{-\lambda_2\varphi}}{e^{\lambda_2\xi} - 1} \int_{\varphi}^{\varphi+\xi} e^{\lambda_2 t} \{M[t, T_k(t)] + \lambda_2 T_k(t)\} dt, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, \quad -\infty < \varphi < +\infty.\end{aligned}\quad (16)$$

Последняя равномерно сходится <sup>(4)</sup> на всей числовой прямой к периодическому предельному режиму  $T = T_{\xi}(\varphi)$  движения машинного агрегата

$$T_k(\varphi) \rightrightarrows T_{\xi}(\varphi), \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad (17)$$

при  $k \rightarrow \infty$ .

По аналогии с выражением (6) для логарифма нормированной кинетической энергии составим последовательность функций

$$f_k(\varphi) = \ln T_k(\varphi) / I(\varphi), \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Из (6) и (18) получим

$$|f_k(\varphi) - f(\varphi)| = |\ln T_k(\varphi) / T_{\xi}(\varphi)|. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что, какое бы положительное число  $\varepsilon$  ни взять, неравенство

$$|\ln T_k(\varphi) / T_{\xi}(\varphi)| < \varepsilon, \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad (20)$$

будет выполняться для всех достаточно больших номеров  $k$ .

Поэтому последовательность  $f_k(\varphi)$  равномерно сходится на всей числовой прямой к логарифму нормированной кинетической энергии машинно-

го агрегата:

$$f_k(\varphi) \rightarrow f(\varphi), \quad -\infty < \varphi < +\infty, \quad (21)$$

при  $k \rightarrow \infty$ .

В пределах требуемой степени точности при достаточно большом  $k$  мы можем положить

$$f(\varphi) = f_k(\varphi), \quad -\infty < \varphi < +\infty. \quad (22)$$

Тогда отыскание положений звена приведения, экстремальных для характеристического критерия  $\chi_{\xi}(\varphi)$  периодического предельного режима

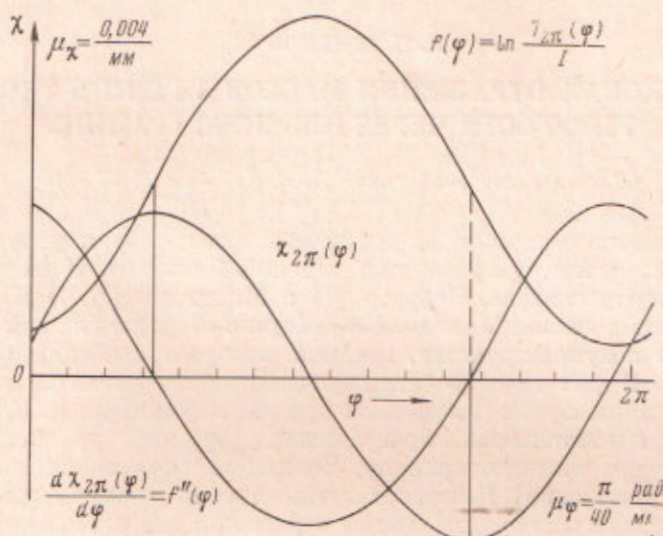


Рис. 1

движения машинного агрегата, сведется к отысканию точек перегиба кривой (18).

5. Если зависимость (6) представлена графически, то нахождение положений звена приведения, в которых характеристический критерий  $\chi_{\xi}(\varphi)$  принимает экстремальные значения, может быть выполнено после двукратного графического дифференцирования (6) по точкам пересечения кривой.

$$f''(\varphi) = [\ln T_{\xi}(\varphi) / I(\varphi)] e^{f'(\varphi)}$$

с осью  $O\varphi$ .

Однако этот способ, как и определение указанных положений непосредственно по графику характеристического критерия  $\chi_{\xi}(\varphi)$ , обычно сопряжен с большими погрешностями. Особенно это относится к машинным агрегатам с малыми коэффициентами неравномерности движения.

Поступило  
25 V 1970

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. И. Артоболевский, Изв. АН СССР, ОТН, № 12 (1952). <sup>2</sup> Н. Е. Жуковский, Полн. собр. соч., 1, 1937. <sup>3</sup> И. И. Артоболевский, В. С. Лощинни, ДАН, 186, № 3 (1969). <sup>4</sup> В. С. Лощинни, Тр. Инст. машиноведения, Семинар по теории машин и механизмов, 23, в. 91, изд. АН СССР, 1961. <sup>5</sup> И. И. Артоболевский, В. С. Лощинни, ДАН, 186, № 2 (1969).