

УДК 517.531+517.51

МАТЕМАТИКА

С. П. ГЕЙСБЕРГ

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 VII 1970)

1°. Пусть  $C\{M_n\}$  — квазианалитический класс функций  $f(x)$ , определенных на всей вещественной оси,  $\|f\| = \sup_n M_n^{-1} \max_x |f^{(n)}(x)| < \infty$ . Обозначим через  $I_a(F)$  подмножество  $C\{M_n\}$ , состоящее из функций  $f(x)$ , для которых  $|f(x)| = O(F(x-a))$ . Б. И. Кореньблюм <sup>(1)</sup> установил существование такой функции  $F$ , что  $I_a(F)$  есть непустое замкнутое подпространство  $C\{M_n\}$  и  $\bigcap_a I_a(F) = \emptyset$ . Эта функция определяет предельную скорость убывания в классе  $*C\{M_n\}$ .

В настоящей заметке показано, что любая функция из класса  $C\{M_n\}$  представима в виде суммы функции из  $I_a(F)$  и функции, голоморфной и принадлежащей классу  $**A$  в некоторой сужающейся бесконечной полосе  $D_a(F)$ . Полоса  $D_a(F)$  характеризуется следующим свойством: если  $\Psi(z)$  конформно отображает  $D_a(F)$  на правую полуплоскость, то  $\Psi(x) = O(-\ln F(x))$ . Этот результат позволяет установить аналог известной теоремы Альфорса — Хейнса <sup>(4)</sup> для квазианалитических функций и тем самым дать описание их асимптотического поведения вдоль вещественной оси.

2°. Без ограничения общности можно считать, что последовательность  $\{M_n\}$  логарифмически выпукла,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} M_n)^{1/n} = \infty$ ,  $M_0 = 1$  <sup>(5)</sup>.

Простые выкладки показывают, что в этих условиях функция

$$\omega(x) = -\ln [x^4 \min_{n \geq 0} x^{-n} M_n], \quad x \geq 1,$$

обладает следующими свойствами:  $0 \leq \omega(x_1 + x_2) \leq \omega(x_1) + \omega(x_2)$ ,

$\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)} \nearrow 1$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\int_1^\infty x^{-2} \omega(x) dx < \infty$ . Положим  $\omega(\varphi_n) = n$ ,

$$\alpha(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^2 \varphi_n^{-2})^{1/2}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между функциями класса  $C\{M_n\}$  и преобразованиями Фурье функций, интегрируемых с весом  $\alpha(x)$ .

Лемма 1. Пусть  $f(x) \in C\{M_n\}$ ,  $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (1 + \tau^2)^{-1} e^{ix\tau} d\tau$ .

\* Ранее более слабый результат был получен Хиршманом <sup>(2)</sup>.

\*\* Функция  $\varphi(z)$  принадлежит классу  $A$  в полосе  $D_a(F)$ , если образ  $\varphi$  при конформном отображении  $D_a(F)$  на правую полуплоскость принадлежит классу  $A$  <sup>(3)</sup>, стр. 289).

Тогда  $\|g\|_x = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \alpha(x) dx \leq K \|f\|$ , причем  $K$  не зависит от  $f$ .

Положим

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\varphi_n(x^2 + \varphi_n^2)}, \quad \eta(\xi(x)) = x,$$

$$F(x) = \begin{cases} \exp \left[ -1/10 \exp \left( \frac{\pi}{2} \int_1^x \frac{\eta(t)}{\omega(\eta(t))} dt \right) \right] & \text{при } x \geq 2, \\ F(2) & \text{при } x < 2, \end{cases}$$

и обозначим для вещественного  $a$  через  $D_a(F)$  область в комплексной плоскости  $z = \sigma + it$ , определенную неравенствами  $|\tau| \leq \frac{\omega(\eta(\sigma - a))}{\eta(\sigma - a)}$  при  $\sigma \geq a + 1$ ,  $|\tau| \leq \omega(\eta(1)) / \eta(1)$  при  $\sigma < a + 1$ .

Лемма 2. Если  $\Psi(z)$  конформно отображает  $D_1(F)$  на правую полуплоскость, то  $\Psi(x) = O(-\ln F(x))$ .

Для функций, интегрируемых с весом  $\alpha(x)$ , имеет место

Теорема 1. Пусть  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \alpha(x) dx < \infty$ ,  $\tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{ixt} dt$ . Тогда для каждого  $a \in (-\infty, \infty)$  справедливо представление

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}_a^-(x) + \tilde{g}_a^+(x),$$

где  $\tilde{g}_a^+(x)$  — сужение на действительную ось целой функции  $\tilde{g}_a^+(z)$ , принадлежащей классу  $A$  в области  $D_a(F)$ ,  $\tilde{g}_a^-(x) \in I_a(F)$ , причем  $\sup_{\kappa} |\tilde{g}_a^-(x)| \leq c_s(a) \|g\|_a$ ,  $\lim_{a \rightarrow -\infty} c_s(a) = 0$ .

Замечание 1. Из результатов Варшавского <sup>(6)</sup> вытекает, что, если функция  $\psi(z)$  принадлежит классу  $A$  в полосе  $D_a(F)$  и  $\psi(\sigma) \in I_{a-\varepsilon}(F)$ ,  $\varepsilon > 0$ , то  $\psi(z) \equiv 0$ . Поэтому  $\tilde{g}_a^+(x)$  есть главная часть функции  $\tilde{g}(x)$ .

Замечание 2. Полоса  $D_a(F)$  в теореме 1 не может быть существенно расширена. Именно, ее нельзя заменить никакой областью, содержащей любую полосу  $D_a(F)$  при достаточно большом  $\sigma$ .

Основную роль при доказательстве теоремы 1 играет

Лемма 3. Пусть

$$\Phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{ix}{\varphi_n} \right)^{-1} e^{ix/\varphi_n}, \quad \tilde{\Phi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{izx} dx, \quad z = \sigma + i\tau.$$

Тогда:

а)  $\tilde{\Phi}(z)$  — целая функция, ограниченная в любой полуплоскости  $\sigma \leq \sigma_0$ ;

б)  $\tilde{\Phi}(z)$  принадлежит классу  $A$  в полосе  $D_0(F)$ ;

в)  $\tilde{\Phi}(z) \in I_0(F)$ .

Доказательство теоремы 1. Так как  $\|g\|_a < \infty$ , то  $g(x) = \Phi(x)r(x)$ , причем  $r(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ . Поэтому

$$\tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(x-t) \tilde{r}(t) dt = \int_{-\infty}^a \tilde{\Phi}(x-t) \tilde{r}(t) dt + \int_a^{\infty} \tilde{\Phi}(x-t) \tilde{r}(t) dt =$$

$$= \tilde{g}_a^-(x) + \tilde{g}_a^+(x).$$

Используя утверждение б) леммы 3 и включение  $D_p(F) \subset D_q(F)$  при  $p < q$ , получим, что  $\tilde{g}_a^+(x)$  есть сужение на действительную ось функции  $\tilde{g}_a^+(z)$ , принадлежащей классу  $A$  в полосе  $D_a(F)$ . Из утверждения в) лем-

мы 3 и неравенства  $2F(x) \geq \int_x^\infty F(t)dt$  получаем, что  $g_a^-(x) \in I_a(F)$ . Теорема доказана.

Из леммы 1 и теоремы 1 вытекает основная

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in C\{M_n\}$ . Тогда  $f(x)$  для любого  $a$  допускает представление

$$f(x) = f_a^+(x) + f_a^-(x),$$

где  $f_a^+(x)$  есть сужение на действительную ось функции  $f_a^+(z)$ , принадлежащей классу  $A$  в полосе  $D_a(F)$ ,  $f_a^-(x) \in I_a(F)$ , причем  $\sup_x |f_a^-(x)| \leq c_f(a) \|f\|$ ,  $c_f(a) \leq 1$ ,  $\lim_{a \rightarrow -\infty} c_f(a) = 0$ .

3°. Применим полученные результаты к исследованию асимптотического поведения функций класса  $C\{M_n\}$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Для этого заметим, что асимптотическое поведение функций, принадлежащих классу  $A$  в области  $D_a(F)$ , известно. Именно, из теоремы Альфорса — Хейнса (4) и результатов Варшавского (5) вытекает, что для функции  $g(z) \neq 0$ , принадлежащей классу  $A$  в  $D_a(F)$ , имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |g(\sigma)|}{\ln F(\sigma - a)} = \gamma_g > -\infty,$$

где  $\lim^*$  означает, что при стремлении к бесконечности  $\sigma$  не принимает значений из некоторого множества  $E$ , для которого

$$\int_E \frac{\eta(x)}{\omega(\eta(x))} dx < \infty.$$

Комбинируя этот результат с теоремой 2, получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть  $f(x) \in C\{M_n\}$ ,  $f(x) \neq 0$ . Тогда существует такое  $a$ , что \*

$$\lim_{x \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(x)|}{\ln F(x - a)} = 0.$$

Аналогичный результат можно сформулировать для случая, когда  $x \rightarrow -\infty$ . Теорему 3 естественно считать аналогом теоремы Альфорса — Хейнса для квазианалитических функций. Она показывает, что асимптотика функций класса  $C\{M_n\}$  идентична асимптотике вдоль вещественной оси функций класса  $A$  в полосе  $D_a(F)$ .

Ленинградский государственный педагогический институт  
им. А. И. Герцена

Поступило  
2 VII 1969

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Б. И. Коренблюм, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1961. <sup>2</sup> Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. <sup>3</sup> I. I. Hirshman, Am. J. Math., 72, 1 (1950). <sup>4</sup> H. Ahlfors, M. Heins, Ann. Math., 50, № 2 (1949). <sup>5</sup> С. Мандельброт, Примающие ряды. Регуляризации последовательностей. Применения, М., 1955. <sup>6</sup> С. Е. Варшавский, Математика, Сборн. пер., 2—4 (1958). <sup>7</sup> I. I. Hirshman, Am. J. Math., 72, 2 (1950).

309177

\* Теорема 3 уточняет результат, полученный Хиршманом ((7), теорема 3а).

