Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 5

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД,
М. И. ГРАЕВ, В. А. ПОНОМАРЕВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SL(2,C)$

0. Неприводимые представления группы $SL(2, C)$ хорошо известны. Однако, в отличие от компактных групп, изучение любого ее представления не сводится к неприводимым. В настоящей работе классифицированы все представления группы $SL(2, C)$, «составленные» в естественном смысле из конечного числа неприводимых; эти представления мы называем модулями Хариш-Чандра (точные определения см. ниже). Дается полное описание таких представлений. А именно, каждое такое представление разлагается в прямую сумму конечного числа далее неразложимых. В работе определяются все, с точностью до эквивалентности, неразложимые представления. Они бывают особые и неособые, причем наиболее интересен особый случай (формулировку результата см. в п. 5). Дается также способ, как составлять неразложимые представления с заданными инвариантами из некоторых элементарных блоков, которые просто строятся по неприводимым представлениям. Неособый случай был ранее разобран Д. П. Желобенко ([6]), у которого имеются также некоторые дальнейшие соображения. Настоящая работа имеет своей основой работы ([1-3]), в которых получена инфинитезимальная классификация модулей Хариш-Чандра.

1°. Определение G-модулей Хариш-Чандра. Линейное топологическое пространство H, в котором действует непрерывное представление связной полупростой группы Ли G, будем называть G-модулем. Пусть U — компактная группа. Алгебраическим U-модулем будем называть линейное пространство H_0 (без топологии), в котором действует представление группы U и для которого выполняется следующее условие: представление в H_0 распадается в прямую сумму неприводимых (конечномерных) представлений, причем каждое из этих представлений входит в разложение с конечной кратностью. Назовем G-модуль H модулем Хариш-Чандра, если H содержит как всюду плотное подпространство алгебраический U-модуль H_0, где U — максимальная компактная подгруппа группы G. Заметим, что H_0 является минимальным линейным подпространством в H, содержащим все неприводимые U-подмодули в H; таким образом, H_0 определено в H однозначно.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Можно доказать, что операторы на H, отвечающие элементам из $\mathfrak{g}$, определены на всем $H_0 \subset H$ и что H_0 инвариантно относительно этих операторов. Таким образом, пространство H_0 снабжено структурой $\mathfrak{g}$-модуля. G-модуль Хариш-Чандра H будем называть неразложимым, если соответствующий ему $\mathfrak{g}$-модуль H_0 неразложим; назовем H неприводимым, если $\mathfrak{g}$-модуль H_0 неприводим. Два G-модуля Хариш-Чандра H' и H'' будем называть эквивалентными, если соответствующие им $\mathfrak{g}$-модули H_0' и H_0'' изоморфны. Заметим, что как определение G-модуля Хариш-Чандра, так и определение неразложимости, неприводимости и эквивалентности не зависят от выбора максимальной компактной подгруппы $U \subset G$.

2°. Элементарные G-модули. Построим простейший класс неразложимых G-модулей Хариш-Чандра, где $G = SL(2, C)$. Пусть $\pi = (n_1, n_2)$ — произвольная пара комплексных чисел, разность которых — целое число. Будем говорить, что функция $f(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in C$ $((z_1, z_2) \neq (0, 0))$ является однородной степени π, если $f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}f(z_1, z_2)$ для любого $\lambda \neq 0$. Однородные функции будем также называть присоединенными однородными функциями нулевого порядка. Назовем функцию $f(z_1, z_2)$ **присоединенной однородной функцией** m-**го порядка степени** π $(m = 1, 2, \ldots)$, если для любого $\lambda \neq 0$ разность $f(\lambda z_1, \lambda z_2) - \lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}f(z_1, z_2)$ является присоединенной однородной функцией $(m-1)$-го порядка степени π.

Пусть D_π^m — пространство всех бесконечно дифференцируемых присоединенных однородных функций m-го порядка степени π. В D_π^m зададим представление $T(g)$ группы $G = SL(2, \mathrm{C})$ по следующей формуле:

$$(T(g)f)(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2),\ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Построенные G-модули D_π^m назовем **элементарными***. Можно доказать, что все они неразложимы. Сформулируем утверждения о строении их композиционных рядов.

Очевидно, что $D_\pi^0 \subset D_\pi^1 \subset \ldots \subset D_\pi^m \subset \ldots$ При этом $D_\pi^m / D_\pi^{m-1} \cong D_\pi^0$ для любого m. Назовем пару $\pi = (n_1, n_2)$ **особой точкой**, если n_1, n_2 — целые, отличные от нуля числа и притом одного знака. Если π — неособая точка, то G-модуль D_π^0 неприводим, а потому ряд $0 \subset D_\pi^0 \subset D_\pi^1 \subset \ldots \subset D_\pi^m$ является композиционным рядом для D_π^m. Если же $\pi = (n_1, n_2)$ — особая точка, то для любого m существует, и притом единственный, G-модуль F_π^m (отличный от D_π^{m-1} и D_π^m) такой, что $D_\pi^{m-1} \subset F_\pi^m \subset D_\pi^m$ **. Таким образом, в особом случае композиционный ряд для D_π^m имеет вид

$$0 \subset F_\pi^0 \subset D_\pi^0 \subset F_\pi^1 \subset D_\pi^1 \subset \ldots \subset F_\pi^m \subset D_\pi^m \text{ ***}. \tag{1}$$

Факторами ряда (1) являются G-модули F_π^0 и $F_{\pi^{-1}}^0$, где $\pi^{-1} = (-n_1, -n_2)$ (именно, $F_\pi^k / D_\pi^{k-1} \cong F_\pi^0$, $D_\pi^k / F_\pi^k \cong F_{\pi^{-1}}^0$); один из них конечномерен, а другой бесконечномерен (например, в случае $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ F_π^0 есть (конечномерный) модуль всех однородных многочленов степени π, а $F_{\pi^{-1}}^0 \cong D_{\pi'}^0$, где $\pi' = (n_1, -n_2)$).

Элементарными модулями в особом случае будем называть как G-модули D_π^m, так и получаемые из них «украчиванием» G-модули F_π^m. Заметим, что G-модули $D_{\pi^{-1}}^{m-1}$ и $F_{\pi^{-1}}^m$ также можно получить «украчиванием» D_π^m, а именно: $F_{\pi^{-1}}^m \cong D_\pi^m / F_\pi^0$, $D_{\pi^{-1}}^{m-1} \cong F_\pi^m / F_\pi^0$.

Дадим определение элементарного G-модуля для случая произвольной редуктивной группы Ли G. Пусть N — максимальная унипотентная подгруппа группы G, B — ее нормализатор в G. Рассмотрим произвольное конечномерное неразложимое представление τ фактор-группы B / N, действующее в пространстве E, и поднимем его тривиальным образом на группу B. Пусть H_τ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(g)$ на G со значениями в E, удовлетворяющих следующему условию: $f(bg) = \tau(b) f(g)$ для любого $b \in B$. Зададим в H_τ представление $T(g)$ группы G по формуле $(T(g_0)f)(g) = f(gg_0)$.

Построенные G-модули H_τ будем называть **элементарными**. Нетрудно показать, что для случая группы $SL(2, \mathrm{C})$ они совпадают с определенными выше G-модулями D_π^m. Гипотеза: G-модули H_τ неразложимы.

3°. **Классификация G-модулей в неособом случае.** Назовем G-модуль Хариш-Чандра **неособым**, если все факторы его композиционного ряда — бесконечномерные модули. Очевидно, что все G-модули D_π^m, где π — неособая точка, являются неособыми. Можно показать

* G-модули D_π^0 — хорошо известная конструкция неприводимых представлений Гельфанда — Наймарка (5).

** Если $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, то пространство F_π^m можно определить так. Зафиксируем функцию $\varphi_m \in D_{\pi_0}^m$, $\pi_0 = (1,1)$ $(\varphi_m \neq 0)$ такую, что для любого $g \in G$ $T(g)\varphi_m = \varphi_m$ по модулю $D_{\pi_0}^{m-1}$ (например, можно принять $\varphi_m(z) = \ln^m(|z_1|^2 + |z_2|^2)$). Назовем функцию $f \in D_\pi^m$ m-м **квазимногочленом**, если $f = P\varphi_m$ по модулю D_π^{m-1}, где P — многочлен (нетрудно убедиться, что определение не зависит от выбора φ_m). Пространство m-х квазимногочленов и есть наше F_π^m. Отметим, что пространство $F_{\pi^{-1}}^m$ можно определить из соображений двойственности.

*** Как в неособом, так и в особом случае D_π^m обладает лишь одним композиционным рядом.

(([3]), см. также ([6])), что ими и исчерпываются все, с точностью до эквивалентности, неособые неразложимые G-модули Хариш-Чандра. Отметим, что два неособых G-модуля $D_{\pi_1}^{m_1}$ и $D_{\pi_2}^{m_2}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2$ и либо $\pi_2 = \pi_1$, либо $\pi_2 = \pi_1^{-1}$.

4°. Элементарные операции над G-модулями. В особом случае неразложимые G-модули Хариш-Чандра будут построены из элементарных при помощи следующих трех элементарных операций.

а) Склеивание. Пусть H_1, H_2 — два G-модуля, $H_1' \subset H_1$, $H_2' \subset H_2$ — изоморфные подмодули, a: $H_1 \to H_2$ — заданный изоморфизм. Склейкой H_1 и H_2 по подмодулям H_1', H_2' назовем G-модуль $H(a) = (H_1 \oplus H_2) / H$, где H — подмодуль, состоящий из пар (x, ax), $x \in H_1$. Эту операцию назовем операцией A.

б) Двойственная операция. Пусть H_1, H_2 — два G-модуля; $H_1' \subset H_1$, $H_2' \subset H_2$ — подмодули такие, что между фактор-модулями имеет место изоморфизм a: $H_1 / H_1' \to H_2 / H_2'$. Склейкой H_1 и H_2 по фактор-модулям H_1 / H_1' и H_2 / H_2' будем называть подмодуль $\bar{H}(a) \subset H_1 \oplus H_2$, состоящий из всех пар (h_1, h_2), $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, таких, что $a\bar{h}_1 = \bar{h}_2$, где $\bar{h}_i \in H_i / H_i'$ — образ элемента $h_i \in H_i$ при естественном гомоморфизме. Эту операцию назовем операцией B.

Замечание. Обе операции инвариантны относительно замены a на λa, где $\lambda \neq 0$ — произвольное число. Отсюда следует, что склейка по неприводимым подмодулям (соответственно по неприводимым фактор-модулям) не зависит от выбора изоморфизма a.

в) Полимеризация. Пусть H — G-модуль и $H_1 \neq H_2$ — два его изоморфных подмодуля. Зафиксируем изоморфизм a: $H_1 \to H_2$. Полимеризацией m экземпляров G-модуля H $(m = 1, 2, \ldots)$ назовем G-модуль $H^{(m)}(\lambda, a) = (\overset{m}{\oplus} H) / H^{\lambda}$, где H^{λ} — подмодуль, состоящий из элементов

$$(ah_1 - \lambda h_1, ah_2 - \lambda h_2 - h_1, \ldots, ah_m - \lambda h_m - h_{m-1}), \tag{2}$$

где $h_1, \ldots, h_m \in H_1$; $\lambda \neq 0$ — произвольное фиксированное комплексное число. Легко убедиться, что $H^{(m)}(\lambda_0\lambda, \lambda_0 a) = H^{(m)}(\lambda, a)$ для любого $\lambda_0 \neq 0$.

5°. Классификация неразложимых G-модулей в особом случае. Рассмотрим фиксированную особую точку $\pi = (n_1, n_2)$, где $n_1 > 0$, $n_2 > 0$. Перечислим особые неразложимые G-модули Хариш-Чандра, имеющие в качестве факторов композиционного ряда F_π^0 и $F_{\pi^{-1}}^0$.

1) Элементарные модули: $D_\pi^m, F_\pi^m, D_{\pi^{-1}}^m, F_{\pi^{-1}}^{m+1}$ *.

2) G-модули $D_\pi^{m_1, \ldots, m_k}$, где $m_0 \geqslant 0$, $m_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $k > 1$. Они строятся по k элементарным модулям:

$$F_{\pi^{-1}}^{m_1}, D_{\pi'}^{m_2}, F_{\pi^{-1}}^{m_3}, D_{\pi'}^{m_4}, \ldots, \tag{3}$$

где на нечетных местах стоят модули типа $F_{\pi^{-1}}^m$, а на четных — модули типа $D_{\pi'}^m$ $(\pi' = (n_1, -n_2))$. Это построение производится так. В каждом из модулей цепочки (3) однозначно определены неприводимый подмодуль и неприводимый фактор-модуль (оба они изоморфны $F_{\pi^{-1}}^0$). Первые два члена цепочки (3) склеиваем операцией B (см. п. 4, б) по неприводимым фактор-модулям. Получаем модуль $D_\pi^{m_1, m_2}$. Сопоставляем естественным образом неприводимому подмодулю из $D_{\pi'}^{m_2}$ неприводимый подмодуль $H_2' \subset D_\pi^{m_1, m_2}$**. Склеиваем $\bar{D}_\pi^{m_1, m_2}$ с $F_{\pi^{-1}}^{m_3}$ операцией A (см. п. 4,а) по непри-

* Модуль $F_{\pi^{-1}}^0 \cong D_{\pi'}^0$ исключается, так как по нашей классификации этот модуль неособый. По той же причине во второй группе исключаются модули $D_\pi^{0, m_2} \cong D_{\pi'}^{m_2}$.

** H_2' состоит из всех пар $(0, h) \in D_\pi^{m_1, m_2}$, где h пробегает неприводимый подмодуль из $D_{\pi'}^{m_2}$.

водимым подмодулям $H_2' \subset D_\pi^{m_1, m_2}$ и $F_{\pi-1}^0 \subset F_{\pi-1}^{m_3}$; получаем модуль $D_\pi^{m_1, m_2, m_3}$. Сопоставляем естественным образом неприводимому фактор-модулю $F_{\pi-1}^{m_3}/D_{\pi-1}^{m_3-1}$ неприводимый фактор-модуль $D_\pi^{m_1, m_2, m_3}/H_3'$*. Склеиваем $D_\pi^{m_1, m_2, m_3}$ с $D_{\pi'}^{m_4}$ операцией B по неприводимым фактор-модулям $D_\pi^{m_1, m_2, m_3}/H_3'$ и $D_{\pi'}^{m_4}/D_{\pi'}^{m_4-1}$; получаем модуль $D_\pi^{m_1, m_2, m_3, m_4}$ и т. д.

3) G-модули $D_{\pi, -+}^{m_1, \ldots, m_k}$, $D_{\pi, +-}^{m_1, \ldots, m_{2p+1}}$, $D_{\pi, --}^{m_1, \ldots, m_{2p+1}}$, которые по существу ничем не отличаются от $D_\pi^{m_1, \ldots, m_k}$. Они получаются склеиванием цепочки (3), в которой укорочены один или оба крайних члена. Именно, при построении $D_{\pi, -+}^{m_1, \ldots, m_k}$ первый член цепочки $F_{\pi-1}^{m_1}$ заменяется членом $F_{\pi-1}^{m_1}/F_{\pi-1}^0 \cong D_\pi^{m_1-1}$; при построении $D_{\pi, +-}^{m_1, \ldots, m_{2p+1}}$ последний член $F_{\pi-1}^{m_{2p+1}}$ заменяется членом $D_{\pi-1}^{m_{2p+1}-1} \subset F_{\pi-1}^{m_{2p+1}}$; наконец, при построении $D_{\pi, --}^{m_1, \ldots, m_{2p+1}}$ укорачивания производятся на обоих концах цепочки (3).

4) G-модули $D_\pi^{m_1, \ldots, m_{2s}; m, \lambda}$ (задаваемые набором $2s$ $(s > 0)$ целых чисел $m_i > 0$**, еще одним целым числом $m > 0$ и комплексным числом $\lambda \neq 0$). Они получаются полимеризацией m экземпляров модулей $D_\pi^{m_1, \ldots, m_{2s}}$. Именно, в G-модулях $F_{\pi-1}^{m_1}$ и $D_{\pi'}^{m_{2s}}$, являющихся крайними членами цепочки (3), фиксируются неприводимые подмодули (изоморфные $F_{\pi-1}^0$). Пусть H_1, H_2 — образы этих подмодулей в $D_\pi^{m_1, \ldots, m_{2s}}$ после склейки цепочки (3). Согласно ([3]), изоморфизм $a: H_1 \to H_2$ может быть определен каноническим образом. Мы полагаем $D_\pi^{m_1, \ldots, m_{2s}; m, \lambda} = (\overset{m}{\oplus} D_\pi^{m_1, \ldots, m_{2s}})/H^\lambda$, где H^λ — подмодуль, состоящий из элементов вида (2).

На рассматриваемые в этой конструкции последовательности $(m_1, \ldots, m_{2s})$ накладывается дополнительное условие непериодичности: не существует делителя r числа s $(r < s)$ такого, что $m_p = m_q$ для любых p и q, сравнимых по модулю $2r$.

Теорема. 1) *Построенные выше модули неразложимы.* 2) *Они попарно неэквивалентны, за исключением случая, когда оба модуля принадлежат к четвертому классу. Два модуля из четвертого класса* $D^{m_1, \ldots, m_{2s}, m, \lambda}$ *и* $D_{\pi_2}^{m_1, \ldots, m'_{2s'}, m', \lambda'}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\pi_1 = \pi_2$, $\lambda = \lambda'$, $m = m'$, $s = s'$ *и* $(m_1', \ldots, m_{2s}')$ *получается из* $(m_1, \ldots, m_{2s})$ *циклической перестановкой на четное число номеров.* 3) *Построенными* G*-модулями исчерпываются все, с точностью до эквивалентности, особые неразложимые* G*-модули Хариш-Чандра.*

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, ДАН, 176, № 2, 243 (1967). [2] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, ДАН, 176, № 3, 502 (1967). [3] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, УМН, 23, в. 2, 3 (1968). [4] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, Функциональный анализ и его приложения, 3, в. 4, 81 (1969). [5] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962. [6] Д. П. Желобенко, ДАН, 126, № 5, 935 (1959).

* H_3' есть образ $D_\pi^{m_1, m_2} \oplus D_{\pi-1}^{m_3-1}$ $(F_{\pi-1}^{m_3}/D_{\pi-1}^{m_3-1}$ — неприводимый фактор-модуль) при естественном отображении $D_\pi^{m_1, m_2} \oplus F^{m_3} \to D_\pi^{m_1, m_2, m_3}$.

** В случае $m_1 = 0$ склеивание $F_{\pi-1}^0 \cong D_{\pi'}^0$ с $D_{\pi'}^{m_2}$ дает $D_{\pi'}^{m_2}$. Поэтому при $m_1 = 0$ можно предполагать, что цепочка (3) начинается сразу с члена $D_{\pi'}^{m_2}$.