Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 5

УДК 513.821.838 *МАТЕМАТИКА*

Д. А. ДЕ-СПИЛЛЕР

ЭКВИМОРФИЗМЫ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АБСОЛЮТА

(Представлено академиком П. С. Новиковым 8 V 1970)

Известно, что всякий эквиморфизм $f\colon H^n \to {}'H^n$ пространств Лобачевского индуцирует топологическое отображение $\varphi\colon \Sigma^{n-1} \to {}'\Sigma^{n-1}$ их бесконечно удаленных сфер ([1]) и что при этом φ не может быть произвольным топологическим отображением ([2]). В. А. Ефремовичем была поставлена задача: найти необходимое и достаточное условие существования эквиморфизма $f\colon H^n \to {}'H^n$, индуцирующего заданное отображение $\varphi\colon \Sigma^{n-1} \to {}'\Sigma^{n-1}$. В этой работе доказывается, что таким условием является квазиконформность отображения φ.

То, что будет сказано ниже об обозначениях, останется в силе, если символы o, H^n, Σ^{n-1} заменить символами $'o$, $'H^n$ и $'\Sigma^{n-1}$.

Мы будем обозначать через o некоторую фиксированную точку пространства H^n, и если $\xi_1, \xi_2 \in \Sigma^{n-1}$, то под расстоянием $\xi_1\xi_2$ мы будем подразумевать угол $\angle \xi_1 o \xi_2$. Точки пространства H^n мы будем обозначать при помощи малых латинских, а точки сферы Σ^{n-1} при помощи малых греческих букв. Если $o \neq z \in H^n$, то луч, исходящий из o и проходящий через точку z, будем обозначать через Γ_z, а бесконечно удаленную точку, в которую ведет луч Γ_z, будем обозначать буквой ζ, т. е. с помощью греческой буквы, соответствующей латинской букве, входящей в обозначение точки, через которую такой луч проходит. Если $\xi \in \Sigma^{n-1}$, то луч, исходящий из o и ведущий в точку ξ, будем обозначать через Γ_ξ. Если $x, y \in H^n$, то через xy будем обозначать расстояние от x до y. Если $\zeta \in \Sigma^{n-1}$ и $\rho > 0$, то через $\Omega(\zeta, \rho)$ будем обозначать $(n-2)$-мерную сферу пространства Σ^{n-1} радиуса ρ с центром в точке ζ.

Т е о р е м а. *Если бесконечно удаленная сфера Σ^{n-1} n-мерного пространства Лобачевского H^n отображена при помощи топологического отображения φ на бесконечно удаленную сферу $'\Sigma^{n-1}$ другого n-мерного пространства Лобачевского $'H^n$, то эквиморфизм $f\colon H^n \to {}'H^n$, индуцирующий отображение $\varphi\colon \Sigma^{n-1} \to {}'\Sigma^{n-1}$, существует тогда и только тогда, когда φ является квазиконформным отображением, $n = 2, 3, \ldots$*

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Н е о б х о д и м о с т ь. Допустим, что эквиморфизм f со свойствами, указанными в теореме, существует. Пусть $f(0) = {}'o$. Обозначим через ξ_1 и ξ_2 две произвольно выбранные точки сферы $\Omega = \Omega(\zeta, \rho)$ достаточно малой для того, чтобы были осуществимы описанные ниже построения.

В силу свойств эквиморфизмов гиперболических пространств ([1]) существует превосходящее единицу число k такое, что для любого луча $\Gamma \subset H^n$ расстояние между любой точкой $x \in f(\Gamma)$ и лучом $A \subset {}'H^n$, имеющим то же начало и ту же бесконечно удаленную точку, что и образ $f(\Gamma)$ луча Γ, меньше, чем k, и расстояние между $f(\Gamma)$ и любой точкой луча A меньше, чем k.

В силу свойств эквиморфизмов геодезических пространств ([3]) найдется превосходящее единицу число $\lambda = \lambda(1)$ такое, что если $a_1, a_2 \in H^n$ и $a_1 a_2 > 1$, то $\frac{1}{\lambda} a_1 a_2 < f(a_1) f(a_2) < \lambda a_1 a_2$. Обозначим через z такую точку луча Γ_ζ, что $z x_1 = 4\lambda k$, где x_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки z на луч Γ_{ξ_1}. Обозначим $\varphi(\zeta)$, $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$ через ζ', ξ_1' и ξ_2'. Обозначим через z^* основание перпендикуляра, опущенного из точки $f(z)$ на луч $\Gamma_{\zeta'}$, и обозначим через x_1^* основание перпендикуляра, опущенного из точки $f(x_1)$ на луч $\Gamma_{\xi_1'}$. Обозначим через x_2^* основание перпендикуляра, опущенного из z^* на луч $\Gamma_{\xi_2'}$, и обозначим через x_2 такую точку луча Γ_{ξ_2}, что расстояние $\rho(x_2^*, f(\Gamma_{\xi_2})) = x_2^* f(x_2)$. Легко видеть, что $\rho(z^*, \Gamma_{\xi_1'}) \leqslant z^* x_1^* \leqslant z^* f(z) + f(z) f(x_1) + f(x_1) x_1^* < 4\lambda^2 k + 2k$; $\rho(z^*, \Gamma_{\xi_2'}) = z^* x_2^* \geqslant f(z) f(x_2) - f(z) z^* - f(x_2) x_2^* > 4k - k - k = 2k$.

Рассматривая прямоугольный треугольник $'o z^* x_2^*$ и прямоугольный треугольник, вершины которого суть $'o$, z^* и основание перпендикуляра, опущенного из точки z^* на луч $\Gamma_{\xi_1'}$, находим, что

$$\sin \zeta'\xi_1' = \operatorname{sh} \rho(z^*, \Gamma_{\xi_1'}) / \operatorname{sh} {'oz^*} \quad \text{и} \quad \sin \zeta'\xi_2' = \operatorname{sh} \rho(z^*, \Gamma_{\xi_2'}) / \operatorname{sh} {'oz^*}. \tag{1}$$

Поэтому $\sin \zeta'\xi_1' / \sin \zeta'\xi_2' = \operatorname{sh} \rho(z^*, \Gamma_{\xi_1'}) / \operatorname{sh} \rho(z^*, \Gamma_{\xi_2'})$. Если сфера Ω достаточно мала, то поэтому $\zeta'\xi' < 2\sin \zeta'\xi_1'$. Учитывая последнее неравенство и неравенства $\rho(z^*, \Gamma_{\xi_1'}) < 4\lambda^2 k + 2k$; $\rho(z^*, \Gamma_{\xi_2'}) > 2k$, получаем, что $\zeta'\xi_1' / \zeta'\xi_2' < \zeta'\xi_1' / \sin \zeta'\xi_2' < 2\sin \zeta'\xi_1' / \sin \zeta'\xi_2' = 2\operatorname{sh} \rho(z^*, \Gamma_{\xi_1'}) / \operatorname{sh} \rho(z^*, \Gamma_{\xi_2'}) < 2\operatorname{sh}(4\lambda^2 k + 2k) / \operatorname{sh} 2k$. Обозначив $2\operatorname{sh}(4\lambda^2 k + 2k) / \operatorname{sh} 2k$ через c, получим:

$$\zeta'\xi_1' / \zeta'\xi_2' < c. \tag{2}$$

Из (2) следует, что φ является квазиконформным отображением.

Таким образом, если отображение $\varphi\colon \Sigma^{n-1} \to {'\Sigma^{n-1}}$ индуцируется эквиморфизмом $f\colon H^n \to {'H^n}$, то φ является квазиконформным отображением. Независимо от автора настоящей работы и одновременно с ним этот результат был получен Г. А. Маргулисом.

II. Д о с т а т о ч н о с т ь. К обозначениям, введенным раньше, присоединим следующие обозначения. Если $z \in H^n$, то будем обозначать через P_z число e^{-oz} и через Ω_z — сферу $\Omega(\zeta, \mathrm{P}_z)$. Вместо обозначений $f(z)$, $f(Z)$, $\varphi(\zeta)$, $\varphi(Z)$ мы будем пользоваться обозначениями z', Z', ζ' и Z', если $z \in H^n$, $\zeta \in \Sigma^{n-1}$, $z \subset H^n$ и $Z \subset \Sigma^{n-1}$. Максимум расстояний вида $\zeta'\xi'$, где $\xi \in \Omega_z$, будем обозначать через P_z', если $z \in H^n$. Предположим, что $\varphi\colon \Sigma^{n-1} \to {'\Sigma^{n-1}}$ является квазиконформным отображением. В силу свойств квазиконформных отображений * существуют превосходящие единицу числа M, K и Q такие, что если $\zeta \in \Sigma^{n-1}$, $\xi_1 \in \Sigma^{n-1}$, $\xi_2 \in \Sigma^{n-1}$ и $\zeta\xi_1 < \zeta\xi_2 < 1/Q$, то

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\zeta\xi_1}{\zeta\xi_2}\right)^K < \frac{\zeta'\xi_1'}{\zeta'\xi_2'} < M\left(\frac{\zeta\xi_1}{\zeta\xi_2}\right)^{1/K}. \tag{3}$$

Определим отображение f пространства $H^n \setminus \mathfrak{A}$ в пространство $'H^n$ при помощи следующих двух условий $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Если $z \in H^n \setminus \mathfrak{A}$, то: $\mathscr{A}$) $e^{-'oz'} = \mathrm{P}_z'$. $\mathscr{B}$) $\Gamma_{z'} = \Gamma_{\zeta'}$.

Здесь $\mathfrak{A} \subset H^n$ — n-мерный замкнутый шар с центром в точке o, радиус которого R превосходит единицу и настолько велик, что если $z \in H^n \setminus \mathfrak{A}$, то $\mathrm{P}_z < 1/Q$, $\mathrm{P}_z < \pi/6$ и $\mathrm{P}_z' < \pi/6$.

Легко видеть, что отображение f^{-1} пространства $(H^n \setminus \mathfrak{A})'$ на пространство $H^n \setminus \mathfrak{A}$ является однозначным отображением. Докажем, что f является равномерно непрерывным отображением пространства $H^n \setminus \mathfrak{A}$ на пространство $(H^n \setminus \mathfrak{A})'$.

---

* Это свойство, описываемое неравенством (3), в существенном доказано, правда для двумерного случая, Герингом ([4]). Распространение его на многомерный случай не вызывает затруднений.

Пусть $a,\ b \in H^n \setminus \mathfrak{A}$, $ab < {}^1/_{12}$ и $oa \geqslant ob$. Обозначим $\rho(a, \Gamma_b)$ через d_1, $oa - ob$ через d_2, $\angle aob$ через Δ_1 и $\mathrm{P}_b - \mathrm{P}_a$ через Δ_2.

Поскольку $d_1 \leqslant ab < {}^1/_{12}$ и $oa > R > 1$, то $\Delta_1 < \pi/6$, так как на H^2, так же как на E^2, острый угол прямоугольного треугольника, лежащий против катета меньшего, чем половина гипотенузы, меньше $\pi/6$. Рассматривая прямоугольный треугольник, вершины которого суть o, a и основание перпендикуляра, опущенного из a на луч Γ_b, находим, что $\operatorname{sh} d_1 = \operatorname{sh} oa \cdot \sin \Delta_1 = = \dfrac{\sin\Delta_1}{2\mathrm{P}_a}(1 - \mathrm{P}_a^2)$. Поскольку $\Delta_1 < \pi/6$, $\mathrm{P}_a < \pi/6$ и $d_1 < {}^1/_{12}$, то $\operatorname{sh} d_1 < 2d_1$, $\sin\Delta_1 > {}^3/_4\Delta_1$ и $(1 - \mathrm{P}_a^2) > {}^2/_3$,

$$2d_1 < \frac{\Delta_1}{\mathrm{P}_a} < 10\, d_1 \leqslant 10\, ab. \tag{4}$$

Из неравенства $d_2 \leqslant ab < {}^1/_{12}$ следует, что $d_2 < e^{d_2} - 1 < 2d_2$ и $e^{d_2} < 2$. Так как $d_2 = oa - ob = \ln(1/\mathrm{P}_a) - \ln(1/\mathrm{P}_b) = \ln \mathrm{P}_b/\mathrm{P}_a$; $e^{d_2} = \mathrm{P}_b/\mathrm{P}_a$; $e^{d_2} - 1 = (\mathrm{P}_b - \mathrm{P}_a)/\mathrm{P}_a = \Delta_2/\mathrm{P}_a$, то справедливо неравенство

$$d_2 < \Delta_2/\mathrm{P}_a < 2d_2 \leqslant 2ab. \tag{5}$$

Определим теперь число Δ_3 следующим образом. Если $\mathrm{P}_b' \geqslant \mathrm{P}_a'$, то обозначим через ξ точку сферы Ω_a, ближайшую к точке $\eta \in \Omega_b$ такой, что $\eta'\beta' = \mathrm{P}_b'$, и если $\mathrm{P}_a' > \mathrm{P}_b'$, то обозначим через ξ точку сферы Ω_b, ближайшую к точке $\eta \in \Omega_a$ такой, что $\eta'\alpha' = \mathrm{P}_a'$. Расстояние $\eta\xi$ обозначим через Δ_3. Нетрудно показать, что $\Delta_3 \leqslant \Delta_1 + \Delta_2$. Учитывая (4), (5) и неравенства $\mathrm{P}_b \geqslant \mathrm{P}_a$, $ab < {}^1/_{12}$, отсюда получаем, что $\xi\eta/\mathrm{P}_a < 12ab < 1$ и $\xi\eta/\mathrm{P}_b < < 12ab < 1$. Из (4) следует также, что $\alpha\beta < \mathrm{P}_a$. Тогда и $\alpha\beta < \mathrm{P}_b$. Поскольку, кроме того, $\mathrm{P}_a < 1/Q$ и $\mathrm{P}_b < 1/Q$, то из неравенства (3) следует, что $\alpha'\beta'/\mathrm{P}_a' < M(\alpha\beta/\mathrm{P}_a)^{1/K}$, $\alpha'\beta'/\mathrm{P}_b' < M(\alpha\beta/\mathrm{P}_b)^{1/K}$, $\xi'\eta'/\mathrm{P}_a' < M(\xi\eta/\mathrm{P}_a)^{1/K}$, $\xi'\eta'/\mathrm{P}_b' < M(\xi\eta/\mathrm{P}_b)^{1/K}$. В силу неравенств $\alpha\beta/\mathrm{P}_b < \alpha\beta/\mathrm{P}_a < 10ab$, $\xi\eta/\mathrm{P}_b < < \xi\eta/\mathrm{P}_a = \Delta_3/\mathrm{P}_a < \Delta_1/\mathrm{P}_a + \Delta_2/\mathrm{P}_a < 12ab$, отсюда следует, что $\alpha'\beta'/\mathrm{P}_a' < < M(10ab)^{1/K}$, $\alpha'\beta'/\mathrm{P}_b' < M(10ab)^{1/K}$, $\xi'\eta'/\mathrm{P}_a' < M(12ab)^{1/K}$, $\xi'\eta'/\mathrm{P}_b' < < M(12ab)^{1/K}$.

В случае, если $\mathrm{P}_b' \geqslant \mathrm{P}_a'$, из последних неравенств, принимая во внимание, что $\mathrm{P}_b' = \beta'\eta' \leqslant \beta'\alpha' + \alpha'\xi' + \xi'\eta' \leqslant \beta'\alpha' + \mathrm{P}_a' + \xi'\eta'$, получаем неравенство $\mathrm{P}_b'/\mathrm{P}_a' < 1 + M(10ab)^{1/K} + M(12ab)^{1/K} < 1 + 2M(12ab)^{1/K}$.

В случае, если $\mathrm{P}_a' > \mathrm{P}_b'$, учитывая, что $\mathrm{P}_a' = \alpha'\eta' \leqslant \alpha'\beta' + \beta'\xi' + \xi'\eta'$, аналогичным образом получаем неравенство $\mathrm{P}_a'/\mathrm{P}_b' < 1 + 2M(12ab)^{1/K}$. Обозначим $|'oa' - 'ob'|$ через d_2'. Легко вычислить, что если $'oa' \geqslant 'ob'$, то $d_2' = \ln(\mathrm{P}_b'/\mathrm{P}_a')$, и если $'oa' < 'ob'$, то $d_2' = \ln \mathrm{P}_b'/\mathrm{P}_a'$. В обоих случаях $d_2' < \ln(1 + 2M(12ab)^{1/K})$. Обозначим $\rho(a', \Gamma_{b'})$ через d_1'. Шар $\mathfrak{A}$ был выбран настолько большим, что из условия $z \in H^n \setminus \mathfrak{A}$ вытекает, что $\mathrm{P}_z' < < \pi/6$. Поскольку $a \in H^n \setminus \mathfrak{A}$ и $\alpha\beta < 10ab\mathrm{P}_a < \mathrm{P}_a$, то, как легко видеть, отсюда следует, что $\mathrm{P}_a' < \pi/6$ и $\alpha'\beta < \pi/6$. Рассматривая прямоугольный треугольник, вершины которого суть $'o$, a' и основание перпендикуляра, опущенного из a' на луч $\Gamma_{b'}$, находим

$$\operatorname{sh} d_1' = \operatorname{sh}' o\, a' \cdot \sin \alpha'\beta' = \frac{\sin \alpha'\beta'}{2\mathrm{P}_a'}(1 - (\mathrm{P}_a')^2). \tag{6}$$

Отсюда следует, что $d_1' < {}^1/_2\alpha'\beta'/\mathrm{P}_a' < {}^1/_2 M(10ab)^{1/K}$. Легко видеть, что $a'b' \leqslant 2d_1' + d_2'$ и что поэтому $a'b' < M(10ab)^{1/K} + \ln(1 + 2M(12ab)^{1/K})$. Последнее неравенство показывает, что f является равномерно непрерывным отображением пространства $H^n \setminus \mathfrak{A}$ на пространство $(H^n \setminus \mathfrak{A})'$.

Перейдя к доказательству равномерной непрерывности отображения f^{-1}, будем доказывать, что выполняется неравенство

$$a'b' > \min\left(\operatorname{ar\,sh}\left(\frac{1}{8M}\left(\frac{ab}{11}\right)^K\right),\ \operatorname{ar\,sh}\left(\frac{1}{16M}\right)\left(\frac{ab}{4}\right)^K,\ \ln\left(1 + \frac{1}{2M}\left(\frac{ab}{4}\right)^K\right)\right). \tag{7}$$

Предположим, что $d_1 > d_2/20$. Тогда $2d_1 + d_2 > ab$ и $d_1 > ab/22$. Из (4) в таком случае следует, что $\Delta_1/\mathrm{P}_a = \alpha\beta/\mathrm{P}_a > ab/11$. Учитывая (3), получаем $\frac{\alpha'\beta'}{\mathrm{P}'_a} > \frac{1}{M}\left(\frac{ab}{11}\right)^K$. Из упоминавшихся ранее неравенств $\alpha'\beta' < \pi/6$ и $\mathrm{P}_a' < \pi/6$ следует, что $\sin\alpha'\beta' > {}^1/_2\alpha'\beta'$ и $1-(\mathrm{P}_a')^2 > {}^1/_2$. Поэтому из (6) вытекает, что $\operatorname{sh} d_1' > \alpha'\beta'/\mathrm{P}_a'$. Из последнего неравенства, учитывая, что $\operatorname{sh} a'b' \geqslant \operatorname{sh} d_1'$ и $\frac{\alpha'\beta'}{\mathrm{P}'_a} > \frac{1}{M}\left(\frac{ab}{11}\right)^K$, получаем неравенство (7).

Предположим теперь, что $d_2 \geqslant 20d_1$. Учитывая (4) и (5), находим, что в этом случае $\Delta_2/\mathrm{P}_a - \Delta_1/\mathrm{P}_a > d_2 - 10d_1 \geqslant d_2 - 10d_2/20 \geqslant d_2/2$, $\Delta_2 - \Delta_1 = \mathrm{P}_b - \mathrm{P}_a - \alpha\beta > {}^1/_2 d_2\mathrm{P}_a > 0$; $\alpha\beta + \mathrm{P}_a < \mathrm{P}_b$. Из последнего неравенства следует, что сфера Ω_a лежит внутри* сферы Ω_b и что поэтому образ Ω_a' сферы Ω_a целиком лежит внутри образа Ω_b' сферы Ω_b. Пусть $\nu \in \Omega_a$ и $\alpha'\nu' = \mathrm{P}_a'$. Для всякой точки $\zeta \in \Omega_b$ $\beta\alpha + \alpha\nu + \nu\zeta = \beta\alpha + \mathrm{P}_a + \nu\zeta \geqslant \beta\zeta = \mathrm{P}_b$; $\nu\zeta \geqslant \mathrm{P}_b - \mathrm{P}_a - \alpha\beta > {}^1/_2 d_2\mathrm{P}_a$. Поэтому сфера $\Omega(\nu, d_2\mathrm{P}_a/2)$ целиком лежит внутри сферы Ω_b. Пусть $\tau \in \Omega(\nu, d_2\mathrm{P}_a/2)$ и $\alpha'\nu' + \nu'\tau' = \alpha'\tau'$. Пусть $\gamma \in \Omega_b$ и $\alpha'\gamma' = \alpha'\nu' + \nu'\tau' + \tau'\gamma'$. Поскольку $ab \leqslant 2d_1 + d_2 \leqslant {}^2/_{20}d_2 + d_2 < 2d_2$, то $d_2/2 > ab/4$ и, следовательно $\nu\tau/\mathrm{P}_a = d_2\mathrm{P}_a/2\mathrm{P}_a > ab/4$. В силу (3)

$$\frac{\nu'\tau'}{\nu'\alpha'} = \frac{\nu'\tau'}{\mathrm{P}'_a} > \frac{1}{M}\left(\frac{\nu\tau}{\mathrm{P}_a}\right)^K > \frac{1}{M}\left(\frac{ab}{4}\right)^K.$$

Рассмотрим теперь два случая.

Случай первый. $\alpha'\beta' \geqslant {}^1/_2\nu'\tau'$. Тогда $\frac{\alpha'\beta'}{\mathrm{P}'_a} \geqslant \frac{\nu'\tau'}{2\,\mathrm{P}'_a} > \frac{1}{2M}\left(\frac{ab}{4}\right)^K$.

Выше было доказано, что $\operatorname{sh} d_1' > \alpha'\beta'/8\mathrm{P}_a'$, причем очевидно, что последнее неравенство остается справедливым независимо от того, верно ли, что $d_1 > d_2/20$ или $d_2 \geqslant 20d_1$. Поэтому в рассматриваемом случае $\operatorname{sh} d'_1 > \frac{1}{16M}\left(\frac{ab}{4}\right)^K$ и выполняется неравенство (7).

Случай второй. $\alpha'\beta' < {}^1/_2\nu'\tau'$. Рассматривая треугольник α', β', γ', находим, что $\mathrm{P}_b' \geqslant \beta'\gamma' > \alpha'\gamma' - \alpha'\beta' = \mathrm{P}_a' + \nu'\tau' + \tau'\gamma' - \alpha'\beta' > \mathrm{P}_a' + \nu'\tau' - {}^1/_2\nu'\tau' = \mathrm{P}_a' + \nu'\tau'/2$; $\frac{\mathrm{P}'_b}{\mathrm{P}'_a} > 1 + \frac{\nu'\tau'}{2\mathrm{P}'_a} > 1 + \frac{1}{2M}\left(\frac{ab}{4}\right)^K$.

Учитывая, что в этом случае $a'b' \geqslant |{}'oa' - {}'ob'| = {}'oa' - {}'ob' = \ln \mathrm{P}_b'/\mathrm{P}_a'$, получаем неравенство (7).

Теперь уже нетрудно показать, что отображение $f\colon (H^n \setminus \mathfrak{A}) \to (H^n \setminus \mathfrak{A})'$ является эквиморфизмом. Этот эквиморфизм можно дополнить до эквиморфизма $f\colon H^n \to {}'H^n$, индуцирующего отображение $\varphi\colon \Sigma^{n-1} \to {}'\Sigma^{n-1}$.

Выражаю искреннюю благодарность В. А. Ефремовичу, В. А. Зоричу, Е. Б. Шабат и Б. В. Шабат за внимание к этой работе и помощь.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Ефремович, Е. С. Тихомирова, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 5 (1964). [2] В. А. Ефремович, В. И. Пупко, ДАН, 160, № 1 (1965). [3] В. А. Ефремович, Уч. зап. Ивановск. пед. инст., 31 (1963). [4] F. W. Gehring, Bull. Am. Math. Soc., 69, 2, 146 (1953).

* То есть включается в меньшую из двух областей, на которые сфера Ω_z, разбивает сферу Σ^{n-1}.