Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Н. ХАДЖИИВАНОВ (Болгария)

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ В СФЕРЫ И ПРОБЛЕМА П. С. АЛЕКСАНДРОВА О БИКОМПАКТНЫХ УПЛОТНЕНИЯХ *

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 III 1970)

В настоящей заметке положительно решаются две следующие задачи Ю. М. Смирнова, связанные с одной теоремой В. Серпинского ([1]) и упомянутой в заглавии проблемой П. С. Александрова ([2]).

Ю. М. Смирнов заметил, что теорема В. Серпинского о неразложимости континуумов в счетное объединение попарно не пересекающихся бикомпактов может быть видоизменена следующим образом:

Если бикомпакт X является счетным объединением попарно не пересекающихся бикомпактов, среди которых нульмерная сфера S^0, то X ретрагируется на S^0.

В ([2]) в связи с построением примера, решающим формулируемую ниже проблему П. С. Александрова, проводятся рассуждения, которые почти без изменения годятся для доказательства одного естественного обобщения этого утверждения на одномерный случай при предположении, что бикомпакт X метризуем.

В 1967 г. в Варшаве Ю. М. Смирнов поставил следующий вопрос:

Будет ли множество X_0 ретрактом бикомпакта $X = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} X_i$ в случае, когда X_0 является n-мерной сферой, $\dim (X_i \cap X_j) \leqslant n-1$ при $i \neq j$ и множества X_i замкнуты. Положительное решение этой проблемы дает наша теорема 1 **. В ([2]) впервые обращено серьезное внимание на связь теории размерности с интересующей нас проблемой П. С. Александрова, долгое время не поддававшейся решению:

Существуют ли бикомпактные уплотнения у связных, локально связных полных метрических пространств со счетной базой, являющихся счетными объединениями компактов?

Там же (([2]), теорема 2) дано одно достаточное условие бикомпактной уплотняемости, сформулированное в терминах связности и локальной связности в размерности n ***. Поэтому возник и второй вопрос о построении примеров связных и локально связных в размерности n пространств, удовлетворяющих условиям П. С. Александрова, но не имеющих бикомпактных уплотнений (теорема 5). Кроме того, из теоремы 1 выводятся: достаточное условие отсутствия бикомпактных уплотнений (теорема 2) и достаточное условие продолжаемости отображения в сферу (теоремы 3 и 4).

Теорема 1. *Если бикомпакт X является счетным объединением бикомпактов, попарные пересечения* **** *которых самое большое $n-1$-мерны, то всякое отображение всякого из них в n-мерную сферу продолжаемо на все X* *****.

Для доказательства нужны три следующие леммы. Чтобы сформулировать первую, удобно считать, что сфера S^n является границей $n+1$-мерного куба $[-1, 1]^{n+1}$, лежащего в E^{n+1}, и обозначить его грани так:

* Уплотнением пространства называют всякий его взаимно однозначный и непрерывный образ.

** Частный случай этой проблемы решается В. Гольштынским в ([3]). Доказательство, которое приводится там, имеет характер, отличный от настоящей работы, и, кроме того, содержит ошибку.

*** Об определениях этих понятий см. ниже.

**** Для различных слагаемых.

***** Рассматриваем только непрерывные отображения.

$S_{\varepsilon i}^n = \{x \in [-1, 1]^{n+1} | x_i = \varepsilon\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, где x_i — координаты точки x, а $\varepsilon = \pm 1$.

Лемма 1. *Непрерывное отображение $f\colon A \to S^n$ замкнутого множества A, лежащего в нормальном пространстве X, непрерывно продолжаемо на все X тогда и только тогда, когда в X существуют такие замкнутые перегородки C_i * между множествами $f^{-1}S_i^n$ и $f^{-1}S_{-i}^n$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} C_i = \phi$**.*

Следующие две леммы нуждаются в понятии нормального прилегания, введенного совсем по другому поводу Ю. М. Смирновым (4):

Подмножество N пространства X нормально прилегает к своему дополнению $M = X \setminus N$, если любые два непересекающиеся замкнутые в M множества имеют непересекающиеся открытые в X окрестности.

Очевидно, всякое подмножество наследственно нормального пространства нормально прилегает к своему дополнению, а также, что всякое открытое подмножество нормального пространства нормально прилегает к своему дополнению. Совсем просто доказывается следующая

Лемма 2. *Всякое множество типа G_δ нормального пространства нормально прилегает к своему дополнению.*

Лемма 3, нам кажется, имеет и самостоятельный интерес:

Лемма 3. *Для любого множества M размерности $\dim M \leqslant n$ с нормально прилегающим к нему дополнением $X \setminus M$ в нормальном пространстве X, всякую систему из $n+1$ пар замкнутых в X множеств $A_{\varepsilon i}$, где $\varepsilon = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, и $A_i \cap A_{-i} = \phi$ для всех i, можно так разбить замкнутыми в X перегородками C_i между A_i и A_{-i}, что $M \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} C_i = \phi$.*

Приведем теперь выводы из теоремы 1.

Теорема 2. *Топологическое пространство X, являющееся счетным объединением бикомпактов, попарные пересечения которых самое большее $n-1$-мерны, не имеет бикомпактных уплотнений, если существует хотя бы одно такое отображение одного из слагаемых бикомпактов в n-мерную сферу, которое непродолжаемо на все X ***.*

Естественное желание освободиться от бикомпактности пространства X и его слагаемых в теоремах 1 и 2 неосуществимо без каких-либо дополнительных требований: существует пример плоского, одномерного, связного, локально бикомпактного множества K, являющегося счетным объединением попарно не пересекающихся связных замкнутых подмножеств. Объединив два каких-нибудь его слагаемых K_0 и K_1 в одно и положив $f(K_0) = 0$, а $f(K_1) = 1$, мы получим отображение в нульмерную сферу, не продолжаемое на все множество K (см. (5), стр. 183). С другой стороны пространство K локально бикомпактно и, следовательно, имеет бикомпактные уплотнения.

Поэтому могут быть интересны следующие теоремы:

Теорема 3. *Пусть вполне регулярное пространство X является счетным объединением замкнутых множеств, попарные пересечения которых самое большее $n-1$-мерны и из которых не больше чем одно, пусть X_0, не бикомпактно, но зато имеет локально бикомпактное дополнение $X \setminus X_0$; тогда любое отображение $f\colon X_0 \to S^n$, продолжаемое на некоторую его окрестность OK_0, дополнение к которой бикомпактно, продолжаемо и на все X ****.*

---

* Множество C называют перегородкой между множествами A и B, если $X \mid C = OA \cup OB$, где OA и OB открыты в X и $OA \cap OB = \phi$.

** Отсюда вытекает, что утверждаемая в (2) эквивалентность лемм 3 и 3′ на самом деле справедлива.

*** Следствие 1 лемм 3′ и 4′ работы (2) вытекает отсюда.

**** Или, другими словами, если X_0 содержит множество тех точек, в которых пространство не локально бикомпактно и $f\colon X_0 \to S^n$ продолжается на нарост некоторого бикомпактного расширения пространства X, то f продолжается на все это расширение и тем более на все X.

Теорема перестает быть верной, если хотя два слагаемых не бикомпактны. Полностью отказаться от требования бикомпактности слагаемых позволяет лишь

Теорема 4. *Пусть локально бикомпактное пространство X является счетным объединением замкнутых множеств, попарные пересечения которых самое большее $n-1$-мерны, причем $n \geqq 1$; тогда всякое отображение всякого слагаемого в n-мерную сферу, продолжаемое на несобственную точку минимального бикомпактного расширения ωX, продолжаемо и на все ωX, а тем более и на все X.*

Теорема не перестает быть верной, если рассматриваем бикомпактное расширение cX локально бикомпактного пространства X, нарост которого конечен.

Перейдем к построению примера. Воспользуемся следующими определениями связности и локальной связности в размерности n:

Пространство X назовем связным в размерности n, если для любого бикомпакта B размерности $\dim B \leqslant n$ всякие два отображения бикомпакта B в X гомотопны; пространство X назовем локально связным в размерности n, если для любой точки x и для любой ее окрестности Ox существует такая ее окрестность Ux, что любые два отображения произвольного бикомпакта B размерности $\dim B \leqslant n$, переводящие B в Ux, гомотопны в Ox.

Теорема 5. *Определенное ниже пространство A_n является $n+1$-мерным, связным и локально связным в размерности $n-1$ полным метрическим пространством со счетной базой, распадающимся в счетное объединение компактов, но не имеет бикомпактных уплотнений.*

Определение пространства A_n. Пусть Q^{n+1} — единичный шар пространства E^{n+1}, а S^n — его граница. Рассмотрим последовательность симплициальных разбиений P_i, $i=1,2,3,\ldots$, сферы S^n, каждое из которых является симплициальным подразделением предыдущего, причем пусть мелкость разбиения P_i меньше чем $1/2^{i+1}$. Через L_i обозначим $n-1$-мерный остов разбиения P_i и рассмотрим, наконец, в E^{n+2} множество

$$A_n = (S^n \times 0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(Q^{n+1}\times\frac{1}{k}\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(L_k \times \left[0,\frac{1}{k}\right]\right).$$

Лемма 4. *Пространство $A_n' = (S^n \times 0) \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(Q^{n+1}\times\frac{1}{k}\right)$ нельзя ретрагировать на $S^n \times 0$.*

Отсюда и из теоремы 2 следует, что пространство A_n не имеет бикомпактных уплотнений. Чтобы доказать выполнение основных для нас свойств связности и локальной связности в размерности $n-1$, предварительно рассмотрим в E^{n+1} последовательность сфер S_i^n, $i=1,2,\ldots$, где все сферы S_i^n концентричны сфере S^n и соответствующие числа $1+1/i$ являются длинами их радиусов. Пусть H_i — та часть конуса над L_i с вершиной в центре сферы S^n, которая лежит в замкнутом слое между S^n и S_i^n.

Лемма 5. *Множество $B = S^n \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k^n \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k$ связно и локально связно в размерности $n-1$.*

Заметим, что при $n=1$ пример A_n и теорема 5 переходят соответственно в пример А и теорему А работы (²).

Поступило
6 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Sierpinski, Tôhoku Math. J., 13, 300 (1918). [2] Ю. М. Смирнов, Fund. Math., 58, 199 (1968). [3] В. Гольштынский, Bull. Acad. Polon Sci., Ser. Math., 16, № 5, 383 (1968). [4] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн. 69, № 1, 141 (1966). [5] К. Куратовский, Топология, 2, М., 1969.