Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 513.83+519.54

МАТЕМАТИКА

М. М. ЧОБАН

К ТЕОРИИ p-ПРОСТРАНСТВ *

(Представлено академиком П. С. Александровым 6 III 1970)

А. В. Архангельский ввел и рассмотрел новый класс топологических пространств, класс p-пространств (1). В дальнейшем значительную роль в развитии теории p-пространств сыграли работы А. В. Архангельского, В. И. Пономарева, В. В. Филиппова, автора и других. В настоящей статье изучаются отображения p-пространств. Этому вопросу посвящена и работа Н. Н. Wicke (6). Все пространства предполагаются вполне регулярными, а отображения — однозначными и непрерывными, если точно не оговорено обратное. Доказательства всюду опускаются.

§ 1. Отображение $f\colon Z \to X$ пространства Z на X называется индуктивно открытым и бикомпактным, если существует такое подмножество $Y \subseteq Z$, для которого $fY = X$ и отображение $f|Y$ открыто и бикомпактно.

Теорема 1. *Пусть $f\colon Z \to X$ — индуктивно открытое бикомпактное отображение паракомпактного пространства Z на X. Тогда пространство X слабо паракомпактно. Если, кроме того, Z есть p-пространство, то и X является p-пространством.*

А. В. Архангельским поставлен следующий вопрос: является ли всякое слабо паракомпактное пространство открытым бикомпактным образом паракомпактного пространства? Этот вопрос чрезвычайно сложен, и в такой постановке представляется почти невероятным существование решения. Тем не менее, в ряде случаев удается получить положительный результат.

Теорема 2. *Пусть X — регулярное слабо паракомпактное p-пространство. Тогда существует такое паракомпактное p-пространство Z, которое индуктивно открыто и бикомпактно отображается на X. Если, кроме того, пространство X полно в смысле Чеха, то и Z полно в смысле Чеха.*

Теорема 3. *Пусть X — слабо паракомпактное p-пространство. Если пространство X удовлетворяет одному из следующих условий:* а) *X нормально;* б) *X локально нормально;* в) *X наследственно, слабо паракомпактно, то существует паракомпактное p-пространство Z, которое открыто и бикомпактно отображается на X. Если, кроме того, пространство X полно в смысле Чеха, то и Z полно в смысле Чеха.*

При доказательстве теорем 2 и 3 важную роль играет ряд специальных утверждений и следующее предположение.

Предложение 1. *Всякое F_σ-подмножество слабо паракомпактного пространства является слабо паракомпактным подпространством.*

Для локально бикомпактных пространств справедлив, вообще говоря, более сильный, нежели теорема 2, результат.

Теорема 4. *Всякое локально бикомпактное слабо паракомпактное пространство X является открытым конечнократным образом некоторого локально бикомпактного паракомпактного пространства Z.*

Теорема 1 лежит в основе доказательства следующей теоремы.

---

* T_1-пространство X называется p-пространством, если существует такое счетное семейство $\{\gamma_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ открытых в ωX (ωX — волмэновское расширение пространства X) покрытий пространства X, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n x \subseteq X$ для любой точки $x \in X$, где $\gamma_n x = \bigcup \{U \in \gamma_n \mid x \in U\}$. Если, кроме того, для всякой точки $x \in X$ и любого натурального числа n существует натуральное число m, для которого $[\gamma_m x]_{\omega X} \subseteq \gamma_n x$, то X называется строгим p-пространством.

Теорема 5. *Произведение счетного числа регулярных слабо паракомпактных p-пространств является слабо паракомпактным пространством.*

Следствие 1. *Произведение счетного числа слабо паракомпактных полных в смысле Чеха пространств является слабо паракомпактным полным в смысле Чеха пространством.*

§ 2. Теорема 6. *Пусть X — T_2-пространство. Тогда следующие условия равносильны:* а) *X есть пространство точечносчетного * типа;* б) *существуют паракомпактное p-пространство Z и открытое отображение $f: Z \to X$ такие, что для любого бикомпакта $F \subseteq X$ счетного характера в X существует бикомпактное подмножество $\Phi \subseteq Z$, для которого $f\Phi \supseteq F$.*

Заметим, что в работе ([6]) доказано, что пространства точечносчетного типа и только они являются открытыми образами паракомпактных p-пространств.

Теорема 6 является усилением теоремы из ([6]). Это усиление имеет важное значение. В частности, оно позволяет сделать следующее заключение.

Следствие 2. *Пространства счетного типа и только они являются открытыми k-накрывающими ** образами паракомпактных p-пространств.*

Теорема 7. *Всякое полное в смысле Чеха пространство X является открытым образом некоторого паракомпактного полного в смысле Чеха пространства Z.*

§ 3. Отображение $f: X \to Y$ называется регулярно полным, если существует такое полное в смысле Чеха пространство $\tilde{X} \supseteq X$, что для всякого $y \in Y$ множество $f^{-1}y$ замкнуто в $\tilde{X}$.

Примеры регулярно полных отображений: 1) Бикомпактные отображения. 2) Непрерывные отображения полных пространств. 3) Пусть $f: X \to Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ) на Y. Если для всякой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}y$ полно относительно метрики ρ, то отображение f регулярно полно.

Теорема 8. *Для всякого регулярного топологического пространства X следующие условия равносильны:* а) *X есть открытый регулярно полный образ некоторого p-пространства;* б) *X есть открытый регулярно полный образ некоторого паракомпактного p-пространства Z.*

Следствие 3. *Всякое p-пространство X является открытым регулярно полным образом некоторого паракомпактного p-пространства Z.*

В работе ([7]) доказано, что открытые регулярно полные отображения p-пространства являются k-накрывающими.

Теорема 9. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое регулярно полное отображение p-пространства X на нормальное слабо паракомпактное пространство Y. Тогда существуют такие паракомпактное p-пространство Z и отображение $g: Z \to X$ пространства Z в X, что:* 1) *$f(gZ) = Y$;* 2) *отображение $\varphi: Z \to Y$, где $\varphi = f \circ g$, открыто и бикомпактно;* 3) *отображение $g: Z \to gZ$ открыто и бикомпактно.*

Следствие 4. *Пусть $f: X \to Y$ — открытое регулярно полное отображение p-пространства X на нормально слабо паракомпактное пространство Y. Тогда существует такое слабо паракомпактное p-пространство $S \subseteq X$, что $fS = Y$ и отображение $f|S$ открыто и бикомпактно.*

Замечание 1. Во всех указанных теоремах возможно дополнительное утверждение, что построенное паракомпактное p-пространство Z удовлетворяет следующим условиям: 1) вес пространства Z равен весу пространства X; 2) пространство Z совершенно отображается на некоторое нульмерное (в смысле dim) метрическое пространство; 3) $\dim Z \leqslant \max\{\dim F \mid F$ бикомпактное подмножество пространства $X\}$.

---

* Пространство X называется пространством точечносчетного (соответственно счетного) типа, если для всякой точки $x \in X$ (соответственно бикомпакта $F \subseteq X$) существует бикомпакт Φ счетного характера в X такой, что $x \in \Phi$ (соответственно $F \subseteq \Phi$).

** Отображение $f: X \to Y$ называется k-накрывающим, если для любого бикомпакта $F \subseteq Y$ найдется бикомпакт $\Phi \subseteq X$, для которого $f\Phi \supseteq F$.

§ 4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется равномерно полным *, если существует счетное семейство $\{\gamma_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ открытых покрытий пространства X такое, что для любой монотонной последовательности $\{F_n \subseteq \Gamma \in \gamma_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty} [F_n] \neq \phi$, как только $F_1 \cap f^{-1}y \neq \neq \phi, \ldots, F_n \cap f^{-1}y = \phi, \ldots$ для некоторой точки $y \in Y$. Заметим, что всякое регулярно полное отображение является равномерно полным.

Теорема 10. *Пусть* $\varphi\colon Y \xrightarrow{\text{на}} S$ *и* $\psi\colon S \xrightarrow{\text{на}} X$ — *открытые равномерно полные отображения. Если* Y *является* p*-пространством, то существует такое паракомпактное* p*-пространство* Z, *которое открыто регулярно полно отображается на* X.

Теорема 11. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *открытое равномерно полное отображение* p*-пространства* X *на слабо паракомпактное пространство* Y. *Тогда* Y *является* p*-пространством.*

Замечание 2. Теорема 12 справедлива для Wp-пространств.

§ 5. Обозначим через $A(X)$ совокупность всех непустых подмножеств пространства X. Положим $F(X) = \{L \in A(X) \mid L \text{ замкнуто в } X\}$. Однозначное отображение $\theta\colon X \to A(Y)$ называется многозначным отображением пространства X в Y. В дальнейшем будем рассматривать только многозначные отображения.

Отображение $\theta\colon X \to A(Y)$ пространства X в метрическое пространство (Y, p) называется π-Y-отображением, если для всякой точки $x \in X$ и любого открытого в X множества $U \supseteq \theta^{-1}(\theta x)$ имеем $\rho(\theta x, Y \setminus \theta^{\#} U) > 0$, где $\theta^{\#} U = \{y \in Y \mid \theta^{-1} y \subseteq U\}$. Когда отображение θ^{-1} однозначно, мы получаем определение В. И. Пономарева (см. ([4])).

Система $\mathscr{L}$ подмножеств пространства X называется N-системой, если для всякого открытого в X множества $U \supseteq L$, где $L \in \mathscr{L}$, найдется такое открытое в X множество V, что $L \subseteq V \subseteq [V] \subseteq U$.

Теорема 12. *Пусть* $\theta\colon X \to A(Y)$ — *полунепрерывное* ** *снизу* π-Y*-отображение* T_1*-пространства* X *в метрическое пространство* (Y, p). *Пусть, далее, существует такое пространство* Z, *что* $X \subseteq Z \subseteq \omega X$ *** *и для любой точки* $x \in X$ *множество* $\theta^{-1}\theta x$ *замкнуто в* Z. *Если семейство* $\{\theta^{-1}\theta x \mid x \in X\}$ *является* N*-системой, то существует такое счетное семейство открытых в* Z *покрытий* $\{\gamma_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ *пространства* X, *что* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n x \subseteq X$ *для любой точки* $x \in X$.

Отображение $\theta\colon X \to A(Y)$ называется XY-бикомпактным, если для любой точки $x \in X$ множество $\theta^{-1}(\theta x)$ бикомпактно.

Теорема 13. *Для всякого регулярного пространства* X *следующие условия эквивалентны*: 1) X *является строгим* p*-пространством*; 2) *существует* XY*-бикомпактное полунепрерывное снизу* π-Y*-отображение* $\theta\colon X \to A(Y)$ *в некоторое метрическое пространство* (Y, ρ); 3) *существует* XY*-бикомпактное полунепрерывное снизу* π-Y*-отображение* $\theta\colon X \to F(Y)$ *в некоторое полное нульмерное метрическое пространство* (Y, ρ).

§ 6. Предложения 1 и 2 из ([8]) устанавливают связь между однозначными и многозначными отображениями. Именно эти предложения позволяют перевести ряд теорем для однозначных отображений на язык многозначных отображений.

Отображение $\theta\colon Y \to A(X)$ называется Y-совершенным, если отображение θ полунепрерывно сверху и θy есть бикомпакт для любой точки $y \in Y$.

Теорема из ([6]) эквивалентна следующей теореме.

---

* Равномерно полные отображения изучены в ([5]).

** Отображение $\theta\colon X \to A(Y)$ полунепрерывно снизу (сверху), если для всякого открытого (замкнутого) в Y множества A множество $\theta^{-1}A$ открыто (замкнуто) в X.

*** Пространство ωX можно заменить любым правильным бикомпактным расширением пространства X.

Теорема 14. *T_2-пространство X является пространством точечносчетного типа тогда и только тогда, когда X является открытым Y-совершенным образом некоторого нульмерного метрического пространства Y.*

Отображение $\theta: Y \to A(X)$ называется k-накрывающим, если для любого бикомпакта $\Phi \subset X$ существует бикомпакт $F \subseteq Y$ такой, что $\theta F \supseteq \Phi$.

Следствие 2 позволяет сделать следующее заключение.

Теорема 15. *T_2-Пространство X является пространством счетного типа тогда и только тогда, когда X является открытым Y-совершенным k-накрывающим образом некоторого метрического пространства Y.*

Отображение $\theta: Y \to A(X)$ X-бикомпактно, если $\theta^{-1}x$ есть бикомпакт для любой точки $x \in X$.

Из теорем 3 и 7 соответственно вытекают:

Теорема 16. *Нормальное пространство X является слабо паракомпактным p-пространством тогда и только тогда, когда X является открытым Y-совершенным X-бикомпактным образом некоторого (нульмерного) метрического пространства Y.*

Теорема 17. *Всякое полное в смысле Чеха пространство X является открытым Y-совершенным образом некоторого полного нульмерного метрического пространства Y.*

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, Матем. сборн., 67 (109), № 1, 55 (1965). [2] А. В. Архангельский, Тр. Московск. матем. общ., 13, 3 (1965). [3] А. В. Архангельский, УМН, 21, в. 4, 133 (1966). [4] В. И. Пономарев, Бюлл. Польск. Акад. наук, 8, № 3, 127 (1960). [5] H. H. Wicke, J. M. Worrell, Duke Math. J., 34, № 2, 255 (1967). [6] H. H. Wicke, Proc. Am. Math. Soc., 22, № 1, 136 (1969). [7] М. М. Чобан, ДАН, 190, № 2 (1970). [8] М. М. Чобан, ДАН, 182, № 3, 514 (1968).