Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 534.26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. М. АСТАПЕНКО

ОТРАЖЕНИЕ ЗВУКА ИМПЕДАНСНОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

(Представлено академиком Л. М. Бреховских 27 IV 1970)

Пусть в плоскости xy расположен след периодической с периодом $2c$ вдоль оси y гофрированной поверхности (в пространстве xyz параллельной оси z), каждый период которого составлен из части выпуклой ограниченной кривой, имеющей ось симметрии, параллельной оси x, и части прямой $x=0$ (рис. 1).

Обозначим через D область, лежащую справа $(x>0)$ от названной выше кривой, и пусть из области D на ее границу ∂D падает плоская волна

$$P_0 = \exp[-ik(\alpha x - \beta y)] \qquad (\alpha^2+\beta^2=1)$$

с волновым числом k и направляющими косинусами α и β.

Постановка задачи. Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывную на границе ∂D и квадратично интегрируемую в окрестностях угловых точек ∂D функцию $P=P(x, y; k)$, регулярную по k при $|k|<\pi/2c$, которая удовлетворяет следующим условиям: в области D — уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)P=0; \tag{1}$$

на одной части границы ∂D (совокупность упомянутых выше выпуклых кривых Γ) — краевому условию Неймана

$$\partial P/\partial n|_\Gamma = 0 \tag{2}$$

(n — нормаль к Γ, направленная внутрь D); на другой части ∂D (совокупность отрезков прямой $x=0$ L) — третьему краевому условию

$$\partial P/\partial x + ikg(y; k)P|_L = 0 \tag{3}$$

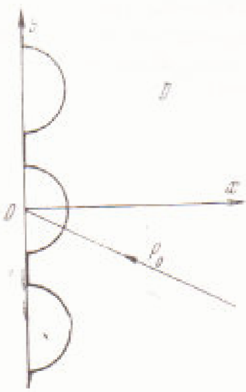

Рис. 1

($g(y; k)$ — периодическая с периодом $2c$, непрерывная функция y, регулярная по k при $|k|<\pi/2c$, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} g \geqslant 0$); везде в области D — условию квазипериодичности

$$P(x, y+2c) = P(x, y)e^{2ik\beta c}; \tag{4}$$

условию погашаемости Малюжинца [1]

$$\sup|_D|(P-P_0)e^{-ik\beta y}| < \infty \quad \text{при } \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} k|. \tag{5}$$

Заметим, что задача дифракции плоской волны на жесткой частопериодической гофрированной поверхности впервые была поставлена и решена Г. Д. Малюжинцем. В настоящей работе применяется метод, предложенный Г. Д. Малюжинцем при решении упомянутой выше задачи.

Основываясь на том факте, что любое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4) и (5), при $x\to 0$ и $|k|<\pi/2c$ представимо таким образом [2]:

$$P = P_0 + ae^{ik(\alpha x+\beta y)} + O(e^{-\sigma x}), \quad \sigma \geqslant \sigma_0 > 0 \tag{6}$$

(a — постоянная), ищем решение задачи (1) — (5) в виде

$$P = P_0 + \frac{\alpha + iB(\alpha, \beta; k)}{\alpha - iB(\alpha, \beta; k)} e^{ik(\alpha x+\beta y)} + \frac{2\alpha u(x, y; k)}{\alpha - iB(\alpha, \beta; k)} e^{ik\beta y}.$$

Далее, подставляя P, определенное последним равенством, в условия (1) — (5), переформулируем поставленную выше задачу дифракции в следующую краевую задачу для функции u:

$$\left(\Delta + 2ik\beta \frac{\partial}{\partial y} + k^2\alpha^2\right)u = 0, \quad (x, y) \in D; \tag{7}$$

$$\partial u / \partial n + ik\beta(\partial y / \partial n)u|_\Gamma = -ik\beta[\cos(k\alpha x) - B\sin(k\alpha x)/\alpha]\partial y/\partial n + $$
$$+ k[\alpha\sin(k\alpha x) + B\cos(k\alpha x)]\partial x/\partial n|_\Gamma; \tag{8}$$

$$\partial u/\partial x + ikgu|_L = k(B - ig); \tag{9}$$

$$u = O(e^{-\sigma x}) \quad \text{при } x \to \infty; \tag{10}$$

$$u(x, y + 2c) = u(x, y); \tag{11}$$

$$4cB = -\alpha \int_{\Gamma_0} \sin(2k\alpha x) \frac{\partial x}{\partial n} dl - B \int_{\Gamma_0} [\cos(2k\alpha x) - 1] \frac{\partial x}{\partial n} dl -$$
$$- 2\alpha \int_{\Gamma_0} u \sin(k\alpha x) \frac{\partial x}{\partial n} dl - 2i\beta \int_{\Gamma_0} u\cos(k\alpha x) \frac{\partial y}{\partial n} dl + 2i \int_{L_0} [1 + u(0, y)] g\, dy. \tag{12}$$

Здесь через Γ_0 и L_0 обозначены соответственно части Γ и L при $|y| < c$.

Интегральное соотношение (12), связывающее B и u, получено из формулы Грина для области D_0 (D_0 — часть D при $|y| < c$), примененной к функциям P и $\cos(k\alpha x)\exp(-ik\beta y)$.

Пользуясь регулярностью функций u, B и g по k в окрестности $k = 0$, разложим их в степенные ряды по k

$$B = \sum_{p=0}^{\infty} B_p k^p, \quad u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p k^p, \quad g = \sum_{p=0}^{\infty} g_p k^p.$$

Если полученный результат подставить в условия (7) — (12) и собрать все члены, имеющие одинаковую степень k, то получим, подобно тому как делалось в работе [2], рекуррентную последовательность краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона:

$$\Delta u_p + 2i\beta \frac{\partial u_{p-1}}{\partial y} + \alpha^2 u_{p-2} = 0, \quad (x, y) \in D; \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_p}{\partial n} + i\beta \frac{\partial y}{\partial n} u_{p-1}\Big|_\Gamma =$$
$$= -i\beta\left[\frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(i\alpha x)^{p-1}}{(p-1)!} - \sum_{r=1}^{p-1}\frac{1-(-1)^r}{2i}\frac{(i\alpha x)^r}{\alpha r!}B_{p-r-1}\right]\frac{\partial y}{\partial n} +$$
$$+ \alpha\left[\frac{1+(-1)^p}{2i}\frac{(i\alpha x)^{p-1}}{(p-1)!} + \sum_{r=0}^{p-1}\frac{1+(-1)^r}{2}\frac{(i\alpha x)^r}{\alpha r!}B_{p-r-1}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\Big|_\Gamma; \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} + i\sum_{r=0}^{p-1} g_r u_{p-r-1}|_L = B_{p-1} - ig_{p-1}; \tag{15}$$

$$u_p = O(e^{-(\pi/c-\varepsilon)x} \quad \text{при } x \to \infty \quad (0 < \varepsilon < \pi/c); \tag{16}$$

$$u_p(x, y + 2c) = u_p(x, y); \tag{17}$$

$$4cB_p = -\frac{1-(-1)^p}{2i}\frac{(2i\alpha)^p}{p!}\alpha M_p - \sum_{r=2}^{p}\frac{1+(-1)^r}{2}\frac{(2i\alpha)^r}{r!}B_{p-r}M_r +$$

$$+2i\alpha\sum_{r=1}^{p-1}\frac{1-(-1)^r}{2}\frac{(i\alpha)^r}{r!}\mu_{p-r}^r-2i\beta\sum_{r=0}^{p-1}\frac{1+(-1)^r}{2}\frac{(i\alpha)^r}{r!}\lambda_{p-r}^r+i\nu_p+i\sum_{r=0}^{p-1}\sigma_{p-r}^r. \tag{18}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$M_p=\int_{\Gamma_0}x^p\frac{\partial x}{\partial n}dl,\quad \mu_p^r=\int_{\Gamma_0}x^r u_p\frac{\partial x}{\partial n}dl,\quad \lambda_p^r=\int_{\Gamma_0}x^r u_p\frac{\partial y}{\partial n}dl,$$

$$\nu_p=\int_{L_0}g_p dy,\quad \sigma_p^r=\int_{L_0}g_r u_p dy \tag{19}$$

$(u_p=B_p=g_p\equiv 0$ при $p<0)$.

Кроме того, при получении равенства (18) было учтено, что функция $u_0\equiv 0$. Последнее утверждение непосредственно следует из единственности решения краевой задачи

$$\Delta u_0=0,\ (x,y)\in D,\quad \partial u_0/\partial n|_{\partial D}=0;$$
$$u_0=O(e^{-\pi x/c})\quad \text{при}\quad x\to\infty;$$
$$u_0(x,y+2c)=u_0(x,y).$$

Из равенства (18) при $p=0$ получаем

$$B_0=\frac{i}{2c}\nu_0=\frac{i}{2c}\int_{L_0}g_0 dy. \tag{20}$$

Аналогично из того же равенства при $p=1$ вытекает соотношение

$$B_1=[i(\nu_1+\sigma_1^0)-2\alpha^2M_1-2i\beta\lambda_1^0]/4c \tag{21}$$

(M_1 — площадь, ограниченная кривой Γ_0 и прямой $x=0$).

Функционалы λ_1^0 и σ_1^0 определяются решением первой краевой задачи (для уравнения Лапласа)

$$\Delta u_1=0,\quad (x,y)\in D,\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_\Gamma=-i\beta\frac{\partial y}{\partial n}+B_0\left.\frac{\partial x}{\partial n}\right|_\Gamma,$$
$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_L=B_0-ig_0,\quad u_1=O(e^{-\pi x/c})\ \text{при}\ x\to\infty, \tag{22}$$
$$u_1(x,y+2c)=u_1(x,y).$$

Рассмотрим гармоническую в D периодическую с периодом $2c$ экспоненциально стремящуюся к нулю при $x\to\infty$ функцию φ, нормальная производная которой на Γ принимает значение

$$\partial\varphi/\partial n|_\Gamma=\partial y/\partial n|_\Gamma.$$

Если формулу Грина для области D_0 применить к функциям u_1 и φ, то получим

$$\lambda_1^0={}^1/_2 i\beta\lambda_y,\quad \lambda_y=-2\int_{\Gamma_0}\varphi\frac{\partial y}{\partial n}dl.$$

Здесь λ_y — коэффициент присоединенной массы решетки ([7]), полученной из гофрированной поверхности путем добавления к последней ее зеркального отражения относительно оси y.

Подставим полученный выше результат в соотношение (21)

$$B_1=[i(\nu_1+\sigma_1^0)+\beta^2\lambda_y-2\alpha^2M_1]/4c. \tag{23}$$

Таким образом, поле вдали от решетки в первом приближении по k при $k\to 0$ определяется формулой

$$P\sim P_0+\frac{\alpha+iB_0+iB_1k+O(k^2)}{\alpha-iB_0-iB_1k+O(k^2)}e^{ik(\alpha x+\beta y)},$$

где B_0 и B_1 найдены в виде выражений (20) и (23) и целиком и полностью вычисляются через граничное значение на L решения первой краевой задачи и коэффициента присоединенной массы соответствующей решетки.

Для нахождения коэффициента отражения плоской волны от исходной гофрированной поверхности в любом приближении по k при $k \to 0$ нужно воспользоваться равенством (18), правая часть которого выражена через функционалы (19), зависящие только от формы рассматриваемой поверхности (коэффициенты формы). Названные выше коэффициенты формы выражаются через решения соответствующих членов рекуррентной последовательности краевых задач для уравнения Пуассона. Задаваясь конкретной функцией $g(y; k)$, входящей в краевое условие на гофрированной поверхности, и формой этой поверхности, упомянутую выше рекуррентную последовательность удобно вычислять на ЭВМ.

Акустический институт
Москва

Поступило
27 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Д. Малюжинец, Симпозиум по дифракции волн, аннотации докладов, Одесса, 1960, Изд. АН СССР, 1960. [2] В. М. Астапенко, Г. Д. Малюжинец, Акуст. журн., в. 3 (1970). [3] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.— Л., 1950.