Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 517.43 **МАТЕМАТИКА**

Б. В. ПАЛЬЦЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ С ЯДРАМИ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ КОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 11 III 1970)

Предположим, что ядро $k(s)$ интегрального уравнения

$$\int_0^T k(t-\tau)\ u\ (\tau)\,d\tau = \lambda_l u(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

является сужением на отрезок $-T \leqslant s \leqslant T$ некоторой функции, определенной на всей действительной оси $-\infty < s < +\infty$. Обозначим $\widetilde{K}(x)$ преобразование Фурье этой функции

$$\widetilde{K}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixs} k(s)\,ds. \tag{2}$$

Работы по асимптотике собственных значений (1) при $l \to \infty$ в основном относятся к самосопряженному положительному случаю (см., например, ([2], [3])). Так, в ([3]), в предположении положительности, четности и монотонного убывания $\widetilde{K}(x)$ при $|x| \to \infty$ (медленнее экспоненциального) была установлена формула $\lambda_l = \widetilde{K}(\pi l/T + o(l))$. Аналогичный по существу результат был получен в ([2]). Однако, насколько известно автору, несамосопряженный случай, т. е. когда $\widetilde{K}(x)$ может быть комплекснозначной, до сих пор почти не исследовался.

Мы здесь рассмотрим задачу (1) для весьма частного класса ядер, на котором тем не менее можно заметить некоторые интересные явления несамосопряженного случая. Предположим, что

$$\widetilde{K}(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{(x-b_1)\ldots(x-b_m)}{(x-a_1^+)\ldots(x-a_q^+)(x-a_1^-)\ldots(x-a_p^-)}, \tag{3}$$

где $b_1, \ldots, b_m$ — корни полинома $Q_m(x)$; $a_1^+, \ldots, a_q^+$, $a_1^-, \ldots, a_p^-$ — корни полинома $P_n(x)$ $(p+q=n)$, причем $\operatorname{Im} a_j^+ > 0$ $(j=1,\ldots,q)$, $\operatorname{Im} a_j^- < 0$ $(j=1,\ldots,p)$; $b_k \neq a_j^\pm$. Уравнение (1) интегральное, поэтому $n > m$.

Обозначим $r = n - m$ и, кроме того, $P^+(x) = (x-a_1^+)\ldots(x-a_q^+)$, $P^-(x) = (x-a_1^-)\ldots(x-a_p^-)$. Пусть.

$$\widetilde{U}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T e^{-ixt} u(t)\,dt. \tag{4}$$

Известно ([4]), что если $\widetilde{K}(x)$ вида (3), то $\widetilde{U}(x)$, где $u(t)$ — решение (1), может быть представлено в виде

$$\widetilde{U}(x) = \frac{\widetilde{\Phi}^+(x) + e^{-ixT}\widetilde{\Phi}^-(x)}{\lambda - \widetilde{K}(x)} = \frac{\mu P_n(x)\,[\widetilde{\Phi}^+(x) + e^{-ixT}\widetilde{\Phi}^-(x)]}{P_n(x) - \mu Q_m(x)}, \tag{5}$$

где $\mu = 1/\lambda$. $\widetilde{\Phi}^+(x)$ и $\widetilde{\Phi}^-(x)$ являются граничными значениями на действительной оси функций аналитических в верхней и соответственно в нижней полуплоскостях комплексной плоскости z и их можно искать, например, в виде

$$\widetilde{\Phi}^+(z) = \frac{c_p^+ z^{p-1} + c_{q-1}^+ z^{p-2} + \ldots + c_1^+}{P^-(z)}, \quad \widetilde{\Phi}^-(z) = \frac{c_q^- z^{q-1} + \ldots + c_1^-}{P^+(z)}, \tag{6}$$

где $c_1^+, \ldots, c_p^+, c_1^-, \ldots, c_q^-$ — некоторые постоянные.

Предположим на время, что корни $z_1, \ldots, z_n$ полинома $P_n(z) - \mu Q_m(z)$ все простые и отличны от корней $P_n(z)$. Поскольку $\widetilde{U}(x)$ является граничным значением на действительной оси целой аналитической функции $\widetilde{U}(z)$ ($\widetilde{U}(x)$ — преобразование Фурье финитной функции), необходимо должны выполняться соотношения

$$\begin{gathered}\widetilde{\Phi}^+(z_1) + e^{-iz_1T}\widetilde{\Phi}^-(z_1) = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \widetilde{\Phi}^+(z_n) + e^{-iz_nT}\widetilde{\Phi}^-(z_n) = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

(7) представляет собой однородную систему n линейных уравнений относительно n неизвестных $c_1^+, \ldots, c_p^+, c_1^-, \ldots, c_1^-$. Введем обозначение

$$\Delta_{s,t}(z_1, \ldots, z_k) = \begin{vmatrix} \frac{z_1^{s-1}}{P^-(z_1)} \cdots \frac{1}{P^-(z_1)} & \frac{z_1^{t-1}e^{-iz_1T}}{P^+(z_1)} \cdots \frac{e^{-iz_1T}}{P^+(z_1)} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{z_k^{s-1}}{P^-(z_k)} \cdots \frac{1}{P^-(z_k)} & \frac{z_k^{t-1}e^{-iz_kT}}{P^+(z_k)} \cdots \frac{e^{-iz_kT}}{P^+(z_k)} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$s + t = k$. Условие существования нетривиального решения системы (7) запишется в виде

$$\Delta_{p,q}(z_1, \ldots, z_n) = 0. \tag{9}$$

(9) является характеристическим уравнением для определения μ_l. Поскольку $\lambda_l \to 0$ при $l \to \infty$, а $\mu_l = 1/\lambda_l \to \infty$, нужно найти асимптотическое поведение корней $z_1, \ldots, z_n$ при $\mu \to \infty$. Нетрудно получить следующее утверждение:

У полинома $P_n(z) - \mu Q_m(z)$ имеется $r = n - m$ корней $z_1, \ldots, z_r$, стремящихся к ∞ и допускающих при достаточно больших $|\mu|$ разложение

$$z = \mu^{1/r} - \frac{P_1 - Q_1}{r} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{(\mu^{1/r})^j}, \tag{10}$$

где

$$P_1 = -(\Sigma a_j^+ + \Sigma a_j^-), \quad Q_1 = -(\Sigma b_j), \tag{11}$$

и m корней $z_{r+1}, \ldots, z_n$, которые стремятся к $b_1, \ldots, b_m$, причем, если b есть корень $Q_m(z)$ кратности k, то среди $z_{r+1}, \ldots, z_n$ существуют k различных корней, допускающих при $|\mu| \to \infty$ разложение

$$\begin{gathered} z = b + \left(\frac{P_n(b)\,k!}{Q_m^{(k)}(b)}\right)^{1/k} \frac{1}{\mu^{1/k}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\widetilde{c}_j}{(\mu^{1/k})^j}, \\ Q_m^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} Q_m(z). \end{gathered} \tag{12}$$

Отсюда видно, что при достаточно больших $|\mu|$ корни $z_1, \ldots, z_n$ будут простыми и отличными от корней $P_n(z)$.

Используя разложения (10) и (12) и рассматривая (9) в различных секторах комплексной переменной $\rho = \mu^{1/r}$, мы придем к следующему результату:

Имеют место два существенно различных случая в зависимости от соотношения между p, q и m.

I. $|p-q|>m$. Для всех λ_l справедливо единое асимптотическое разложение

$$\lambda_l \approx \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(|p-q|-m)\operatorname{sign}(p-q)\right]\left(\frac{\pi l}{T\sin[\pi\min(p,q)/r]}\right)^{-r}\times$$
$$\times\left[1+\frac{\theta_1}{l}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{Q_k}{l^k}\right] \qquad (13)$$
$$(l=1,2,3,\ldots),\quad \text{а}\quad \theta_1=-\left[(\min(p,q))^2+r\right]/2.$$

Прежде чем перейти к случаю II, введем еще обозначение. Пусть $z_1(\mu),\ldots,z_m(\mu)$ — m комплекснозначных функций параметра μ, причем $z_1(\mu)\to b_1,\ldots,z_m(\mu)\to b_m$ при $\mu\to\infty$. Кроме того, при достаточно больших $|\mu|$ все $z_1,\ldots,z_m$ попарно различны, хотя некоторые среди $b_1,\ldots,b_m$ могут совпадать между собой. Обозначим

$$\frac{\Delta_{s,t}(b_1,\ldots,b_m)}{W_m(b_1,\ldots,b_m)}=\lim_{\mu\to\infty}\frac{\Delta_{s,t}(z_1(\mu),\ldots,z_m(\mu))}{W_m(z_1(\mu),\ldots,z_m(\mu))}, \qquad (14)$$

где $W_m(z_1,\ldots,z_m)$ — определитель Вандермонда чисел $z_1,\ldots,z_m$. Очевидно, такой предел всегда существует и зависит только от $b_1,\ldots,b_m$, но не от вида $z_1(\mu),\ldots,z_m(\mu)$. Нетрудно дать выражение (14) непосредственно через $b_1,\ldots,b_m$ и корни полинома $P_n(x)$.

В случае II мы накладываем на $\bar{K}(x)$ еще некоторые условия алгебраического характера — условия «регулярности» R).

II. $|p-q|\leqslant m$. Рассмотрим два подслучая:

a) $r=n-m$ нечетно. Предположим, что выполнены еще условия R):

$$A=\frac{\Delta_{p-(r-1)/2,\,q-(r+1)/2}(b_1,\ldots,b_m)}{W_m(b_1,\ldots,b_m)}\neq 0,$$
$$B=\frac{\Delta_{p-(r+1)/2,\,q-(r-1)/2}(b_1,\ldots,b_m)}{W_m(b_1,\ldots,b_m)}\neq 0. \qquad (15)$$

Тогда собственные значения λ_l можно разбить на две серии λ_l^+ и λ_l^-, каждую из которых можно представить асимптотическим рядом

$$\lambda_l^{\pm}\approx\pm\left(\frac{2\pi l}{T}\right)^{-r}\left[1+\frac{\theta_1^{\pm}}{l}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta_k^{\pm}}{l^k}\right]\quad (l=1,2,3,\ldots),$$
$$\theta_1^{\pm}=\mp\left[\frac{T}{2\pi}(P_1-Q_1)\pm\frac{(r-1)^2}{8}-\right. \qquad (16)$$
$$\left.-\frac{r}{4}(p-q+m-1)\operatorname{sign}(p-q)+\frac{ir}{2\pi}\ln\frac{B}{A}\right],$$

где P_1 и Q_1 даются (11).

b) r четно. Условие «регулярности» имеет вид

$$\text{R)}\ A=\frac{\Delta_{p-r/2,\,q-r/2}(b_1,\ldots,b_m)}{W_m(b_1,\ldots,b_m)}\neq 0. \qquad (17)$$

Тогда также собственные значения λ_l можно разбить на две серии λ_l^+ и λ_l^-, для каждой из которых справедливы асимптотические разложения:

$$\lambda_l^{\pm}\approx\left(\frac{2\pi l}{T}\right)^{-r}\left[1+\frac{\theta_1^{\pm}}{l}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\theta_k^{\pm}}{l^k}\right]\quad (l=1,2,3,\ldots),$$
$$\theta_1^{\pm}=-\frac{r}{4}\left(\frac{r}{2}\pm 1\right). \qquad (18)$$

Собственные значения во всех случаях, начиная с достаточно больших l, простые. Ряды (13), (16) и (18) понимаются как асимптотические и, вообще говоря, не являются сходящимися.

В заключение сделаем несколько замечаний. Если в случае II условия R) не выполняются, то формулы (16) или (18) становятся неверными. При этом может получиться, что для λ_l вообще не существует асимптотических рядов вида (16) или (18). Заметим, что в случае I не накладывается никаких условий типа R).

Из (16) и (18) видно, что в случае II первый член асимптотики λ_l совпадает с выражением, полученным в ([3]). Случай II поэтому можно рассматривать как «слабо» несамосопряженный. Что касается случая I, то выражение первого члена асимптотики уже дается формулой, отличной от формулы самосопряженного случая. Например, если положить $p = q + 1$, $m = 0$, то

$$\lambda_l \sim e^{-i\pi/2}\left(\pi l/T \sin\frac{\pi q}{2q+1}\right)^{-(2q+1)}$$

и, несмотря на то, что первый член разложения $\bar{K}(x)$ при $x \to \infty$ действителен, собственные значения асимптотически мнимые. Кроме того, если положить, например, $q = 0$, $p = n$, то (1) вообще не имеет собственных чисел, так как соответствующий интегральный оператор будет вольтерровым. Таким образом, случай I не имеет аналога для самосопряженных операторов и является в некотором смысле промежуточным между вольтерровым и «слабо» несамосопряженным случаями.

Заметим, наконец, что полученные результаты являются обобщением результатов ([1]) для обыкновенных дифференциальных операторов на случай интегральных операторов свертки.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 373 (1908). [2] M. Rosenblatt, J. Math. Mech., 12, 4, 619 (1963). [3] H. Widom, Arch. Rational. Mech. Analys., 17, 3, 215 (1964). [4] М. П. Ганин, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 2, 31 (1963).