Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 5

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

ЦЕНТР И РАЗБРОС РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 VI 1970)

I. Успех построения общей теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин, в которой не используется традиционное условие равномерной предельной малости слагаемых (см. ([1])), в значительной степени обязан использованию новых характеристик распределений, названных центрами. Поскольку характеристики такого типа, являющиеся обобщением понятий математического ожидания и дисперсии, могут оказаться полезными и вне теории предельных теорем, нам представляется полезным ознакомить с ними специалистов в области теории вероятностей.

II. Далее используются следующие обозначения: $F = F_\xi$, $f = f_\xi$ — соответственно функция распределения и характеристическая функция случайной величиной ξ; $Q(x, \xi)$ — функция концентрации распределения F_ξ;

$$\Delta(\xi) = \sup\{r: \min_{|t|\leqslant r} |f(t)| > 0\} \quad (0 < \Delta(\xi) \leqslant \infty).$$

Определение. Пусть ξ — некоторая случайная величина и $r > 0$ — такое число, для которого функция $\log f(t)$ в интервале $|t| \leqslant r$ определена и интегрируема. Величины

$$C^r(\xi) = \frac{2}{r^2}\int_0^r \operatorname{Im} \log f(t)\, dt, \quad B^r(\xi) = -\frac{6}{r^2}\int_0^r \operatorname{Re} \log f(t)\, dt$$

мы будем называть соответственно r-центром и r-разбросом * (коротко — центром и разбросом) случайной величины ξ.

III. Многие из приводимых в этом пункте свойств центров и разбросов носят очевидный характер и приводятся только ради полноты аргументации в пользу естественности предложенного определения. Эти характеристики очень удобны для эффективного выбора нормирующих констант в линейных преобразованиях случайных величин и потому с успехом могут использоваться в предельных теоремах. Центры, кроме того, удачным образом сочетают в себе аддитивные свойства математических ожиданий (правда, лишь для независимых слагаемых) и центрирующие свойства медиан. Впрочем, все это нетрудно будет заметить при ознакомлении с излагаемыми ниже свойствами центров и разбросов.

1°. Величины $C^r(\xi)$, $B^r(\xi)$ существуют для каждого $r < \Delta(\xi)$.

2°. Если $N > 0$ — такое число, что $q = Q(N, \xi) > 1/2$, то

$$\Delta(\xi) \geqslant \sup\{x: \min_{|t|\leqslant x} \operatorname{Re} f_\xi(t) > 0\} \geqslant \sqrt{4q-2}/N. \tag{1}$$

3°. Если математическое ожидание $\mathbf{E}\xi$ и дисперсия $\mathbf{D}\xi$ существуют (конечные или бесконечные), то при $r \to 0$

$$C^r(\xi) \to \mathbf{E}\xi, \quad B^r(\xi) \to \mathbf{D}\xi. \tag{2}$$

---

* Аналогичный функционал в несколько иных целях использовался А. Я. Хинчиным.

4°. Справедливы следующие равенства:

$$\Delta(-\xi)=\Delta(\xi); \quad C^r(-\xi)=-C^r(\xi), \quad B^r(-\xi)=B^r(\xi)$$

для всех $r<\Delta(\xi)$.

Если λ — некоторое положительное число, то

$$\Delta(\lambda\xi)=\Delta(\xi)/\lambda$$

и для всех $r<\Delta(\lambda\xi)$

$$C^r(\lambda\xi)=\lambda C^{r\lambda}(\xi), \quad B^r(\lambda\xi)=\lambda^2 B^{r\lambda}(\xi).$$

Если ξ имеет нормальное (γ, σ^2)-распределение, то $\Delta(\xi)=\infty$ и для всех r

$$C^r(\xi)=\gamma, \quad B^r(\xi)=\sigma^2.$$

5°. Пусть $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots$ — ряд независимых случайных величин, сходящийся с вероятностью 1. Тогда

$$\Delta(\xi)=\inf_j \Delta(\xi_j); \tag{3}$$

для любого $r<\Delta(\xi)$ центры и разбросы слагаемых ξ_j существуют, и при этом

$$C^r(\xi)=\sum_j C^r(\xi_j), \quad B^r(\xi)=\sum_j B^r(\xi_j). \tag{4}$$

6°. Пусть последовательность $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ (по вероятности) при $n\to\infty$. Тогда

$$\Delta(\xi_n)\to\Delta(\xi); \tag{5}$$

для каждого $r<\Delta(\xi)$ и достаточно больших n центры и разбросы случайных величин ξ_n существуют, и при $n\to\infty$

$$C^r(\xi_n)\to C^r(\xi), \quad B^r(\xi_n)\to B^r(\xi). \tag{6}$$

7°. Если последовательность ξ_n такова, что для некоторой случайной величины ξ выполняются условия (5) и (6), то распределения случайных величин ξ_n образуют компактное множество по отношению к слабой сходимости.

Если, кроме того, $\Delta(\xi)=\infty$, то $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ при $n\to\infty$.

8°. При достаточно высокой степени концентрации распределения случайной величины ξ центр ξ оказывается близким и к медиане $\mu(\xi)$, и к урезанному среднему этой случайной величины, а разброс — близким к урезанной дисперсии. Именно, пусть $r<\Delta(\xi)$, $\varepsilon>0$, $q=Q(\varepsilon, \xi)\geqslant\alpha>{}^1/_2$, и пусть

$$A=\{|\xi|<\varepsilon\}, \quad a_\varepsilon(\xi)=\mathbf{E}(\xi I_A), \quad \sigma_\varepsilon^2(\xi)=\mathbf{D}(\xi I_A),$$

где I_A — индикатор события A. Тогда

$$|C^r(\xi)-\mu(\xi)|<K_1(\varepsilon r+1-q)/r,$$

$$|C^r(\xi)-a_\varepsilon(\xi)|<K_2(\varepsilon^2r^2+1-q)/r,$$

$$|B^r(\xi)-\sigma_\varepsilon^2(\xi)|<K_3(\varepsilon^4r^4+1-q)/r^2,$$

где постоянные K_i зависят только от величин i, α.

IV. Мы проиллюстрируем возможности использования центров и разбросов несколькими теоремами.

Теорема 1. *Для всех $r<\Delta(\xi)$ имеют место неравенства*

$$0{,}08\, Es\left(\frac{r}{11{,}2}\bar{\xi}\right)\leqslant r^2B^r(\xi)\leqslant -3\log\left\{1-4Es\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\bar{\xi}\right)\right\},$$

где $s(x)=\min(x^2, 1)$ и $\bar{\xi}=\xi-C^r(\xi)$. Верхняя оценка $r^2B^r(\xi)$ будет, *естественно, содержательной лишь для тех значений r, для которых правая часть неравенства конечна.*

Следствие. *Для каждого $r < \Delta(\xi)$ и любого $X > 0$ имеет место неравенство*

$$P\{|\xi - C^r(\xi)| > X\} < 1970\, B^r(\xi) / \min(X^2, r^{-2}).$$

Принимая во внимание свойство 3° предыдущего пункта, нетрудно заметить, что это неравенство является обобщением известного неравенства Чебышева.

Теорема 2. *Для того чтобы ряд независимых случайных величин $\xi_1 + \xi_2 + \ldots$ сходился (абсолютно сходился) с вероятностью 1, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) $\Delta = \inf\limits_j \Delta(\xi_j) > 0$;

б) для какого-либо $s < \Delta$ сходятся ряды

$$\sum_j C^s(\xi_j) \quad (\text{соответственно } \sum_j |C^s(\xi_j)|), \qquad \sum_j B\ (\xi_j).$$

Следствие. *Любой ряд независимых случайных величин, сходящийся с вероятностью 1, можно превратить в абсолютно сходящийся, если центрировать каждое слагаемое своим s-центром.*

Теорема 3. *Множество функций распределения $\mathfrak{S} = \{F_\xi\}$ будет компактным по отношению к слабой сходимости тогда и только тогда, когда:*

а) $\Delta = \inf\limits_{\mathfrak{S}} \Delta(\xi) > 0$;

б) *найдется такая последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_k < \Delta$, $r_k \to 0$, и такие постоянные $a_k > 0$, $b_k > 0$, причем $b_k \to 0$ при $k \to \infty$, что*

$$|C^{r_k}(\xi)| < a_k, \quad r_k^2 B^{r_k}(\xi) < b_k \text{ для всех } F_\xi \in \mathfrak{S}.$$

V. Заметим, что определение центра и разброса можно варьировать, сохраняя при этом или все или бо́льшую часть из отмеченных выше свойств. Именно, можно рассматривать в качестве центров и разбросов величины вида

$$C_\sigma^r(\xi) = \int_0^r \operatorname{Im} \log f_\xi(t)\, d\sigma(t) \Big/ \int_0^r t\, d\sigma(t),$$

$$B_\sigma^r(\xi) = -2 \int_0^r \operatorname{Re} \log f_\xi(t)\, d\sigma(t) \Big/ \int_0^r t^2\, d\sigma(t),$$

где σ — такая мера на $(0, \infty)$, для которой интеграл, стоящий в знаменателе определения $C_\sigma{}^r$, конечен и положителен (σ может зависеть от r).

Центры и разбросы, определяемые с помощью мер σ, имеющих плотность, мало чем отличаются друг от друга по своим свойствам. Наиболее простой вид центров и разбросов получается, если в качестве σ выбрать вырожденное распределение со скачком в точке r. При нормировании случайных величин этот вариант центров и разбросов может быть использован не менее успешно, чем вариант с $\sigma \equiv t$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
5 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. M. Zolotarev, C. R., **270**, 899 (1970).