Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 5

УДК 517.512 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Ф. Г. НАСИБОВ

ОБ ОЦЕНКЕ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ ПОСРЕДСТВОМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

Пусть $W_\sigma^{(p)}(p\geqslant 1)$ — класс целых функций $g_\sigma(z)$ конечной степени $\leqslant\sigma$, для которых $g_\sigma(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $p\geqslant 1$. Обозначим через $A_\sigma(f)_p$ наилучшее приближение функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ в метрике пространства $L_p(-\infty,\infty)$ посредством целых функций из класса $W_\sigma^{(p)}$. т. е.

$$A_\sigma(f)_p=\inf_{g_\sigma\in W_\sigma^{(p)}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-g_\sigma(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

и введем в рассмотрение модули непрерывности

$$\omega_1(f;\delta)_p=\sup_{|h|\leqslant\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\omega_2(f;\delta)_p=\sup_{|h|\leqslant\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Известно, что для функции $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ существуют постоянные K_1 и K_2, удовлетворяющие неравенствам:

$$A_\sigma(f)_p\leqslant K_i\omega_i(f;\delta)_p\qquad(i=1,2),$$

которые являются аналогами классической теоремы Джексона для периодических функций (см. ([1]), стр. 274).

Настоящая статья посвящена * нахождению возможных наименьших значений K_i^0 постоянных K_i $(i=1,2)$, в основном при $p=2$. Прежде всего доказываются две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ *и* $\varphi(x)$ — *ее преобразование Фурье в смысле* $L_2(-\infty,\infty)$, *т. е.*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{e^{ixt}-1}{it}\,dt,\tag{1}$$

где $\varphi(x)\in L_2(-\infty,\infty)$. *Тогда функция*

$$g_\sigma^0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(t)e^{ixt}\,dt\tag{2}$$

является целой функцией из класса $W_\sigma^{(2)}$, *наименее уклоняющейся от* $f(x)$ *в смысле метрики* $L_2(-\infty,\infty)$. *Кроме того,*

$$A_\sigma(f_2)=\|f(x)-g_\sigma^0(x)\|_2=\left(\int_{|t|>\sigma}|\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.\tag{3}$$

В самом деле, применяя известную теорему Планшереля к функции

$$f(x)-g_\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]\frac{e^{ixt}-1}{it}\,dt,$$

* Подобным вопросам в периодическом случае посвящены работы ([2-5]).

где $\psi(t)=0$ и $|t|>\sigma$, находим

$$\inf_{g_\sigma\in W_\sigma^{(2)}}\|f(x)-g_\sigma(x)\|_2^2=\inf_{\psi\in L_2(-\sigma,\sigma)}\int_{-\sigma}^{\sigma}|\varphi(t)-\psi(t)|^2\,dt+\int_{|t|>\sigma}|\varphi(t)|^2\,dt.$$

Отсюда следует равенство (3). Применяя лемму 1 к функции

$$f^{(r)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}-1}{it}(it)^r\varphi(t)\,dt\in L_2(-\infty,\infty),$$

находим

$$A_\sigma(f^{(r)})_2=\left\{\int_{|t|>\sigma}|(it)^r\varphi(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}>\sigma^r\left\{\int_{|t|>\sigma}|\varphi(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}=\sigma^rA_\sigma(f)_2.$$

Лемма 2. *Если $\varphi(t)$ — любая функция из $L_2(-\infty,\infty)$, то*

$$\inf_{|y|\leqslant\pi/\sigma}\int_{|t|>\sigma}|\varphi(t)|^2\cos yt\,dt<0. \tag{4}$$

Доказательство. Продолжая четно на $(-\infty,0)$ функцию

$$\varphi_\sigma(y)=-\sin\sigma y \text{ при } 0\leqslant y\leqslant\pi/\sigma;\quad \varphi_\sigma(y)=0 \text{ при } y>\pi/\sigma,$$

представим ее в виде интеграла Фурье

$$\varphi_\sigma(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\tilde{\varphi}_\sigma(t)\cos yt\,dt.$$

Отсюда находим

$$\tilde{\varphi}(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi_\sigma(y)\cos yt\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4\sigma}{t^2-\sigma^2}\cos^2\frac{\pi t}{2\sigma}.$$

Заметим, что функция

$$F_\sigma(y)=\sqrt{\pi/2}\,|\varphi(t)|^2,\ |t|>\sigma;\quad F_\sigma(y)=0,\ |t|\leqslant\sigma,$$

является косинус-преобразованием функции

$$F_\sigma(y)=\int_\sigma^\infty|\varphi(t)|^2\cos yt\,dt,\quad 0\leqslant y\leqslant\pi/\sigma.$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^\infty F_\sigma(y)\varphi_\sigma(y)\,dy=-\int_0^\infty\tilde{F}_\sigma(y)\tilde{\varphi}_\sigma(y)\,dy=2\sigma\int_\sigma^\infty|\varphi(t)|^2\frac{\cos^2\pi t/2\sigma}{t^2-\sigma^2}\,dt\geqslant0. \tag{5}$$

С другой стороны, если $F_\sigma(y)\geqslant0$ всюду на $[0,\pi/\sigma]$, то

$$\int_0^\infty F_\sigma(y)\varphi_\sigma(y)\,dy=-\int_0^{\pi/\sigma}F_\sigma(y)\sin\sigma y\,dy<0. \tag{6}$$

Неравенство (6) противоречит (5), и, следовательно, $F_\sigma(y)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения на $[0,\pi/\sigma]$, т. е. справедливо 4). Благодаря этим леммам доказана следующая

Теорема 1. *Если функция $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$, то для наилучшего приближения $A_\sigma(f)_2$ справедливы неравенства*

$$A_\sigma(f)_2<\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1(f;\pi/\sigma)_2, \tag{7}$$

$$A_\sigma(f)_2<{}^1/_2\,\omega_2(f;\pi/\sigma)_2. \tag{8}$$

Доказательство. Из равенства (1) находим

$$\omega_1\left(f;\frac{\pi}{\sigma}\right)_2=\sup_{|y|\leqslant\pi/\sigma}\|f(x+y)-f(x)\|_2=\sqrt{2}\left\{\int_{|t|>\sigma}|\varphi(t)|^2\,dt-\inf_{0\leqslant y\leqslant\pi/\sigma}F_\sigma(y)\right\}.$$

Отсюда в силу лемм 1 и 2 следует (7). Кроме того, при $|t| \leqslant \pi / \sigma$

$$\sup_{|t|\leqslant\pi/\sigma}\|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\|_2^2 \geqslant 4\sup_{|t|\leqslant\pi/\sigma}\int\limits_{|u|>\sigma}|\varphi(u)|^2(1-\cos ut)^2\,du \geqslant$$

$$\geqslant 4\int\limits_{|u|>\sigma}|\varphi(u)|^2\,du - 8\inf_{0\leqslant y\leqslant\pi/\sigma} F_\sigma(y).$$

Отсюда следует неравенство (8).

Следствие. *Если $f(x)$ имеет производную $f^{(r)}(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, то справедливы оценки*

$$A_\sigma(f_2) < \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma^r}\,\omega_1(f^{(r)}; \pi/\sigma)_2, \quad A_\sigma(f)_2 < \frac{1}{2\sigma^r}\,\omega_2(f^{(r)}; \pi/\sigma)_2.$$

Попутно устанавливается, что для наилучшего приближения целой функции

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\varphi(t)\,e^{ixt}\,dt$$

степени λ, где $\varphi(t) \in L_2(-\lambda, \lambda)$, посредством целых же функций из класса $W_\sigma^{(2)}$ имеем

$$A_\sigma(f_\lambda)_2 = \Big(\int\limits_{\sigma<|t|\leqslant\lambda}|\varphi(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}.$$

В качестве примера рассматривается функция $f(x) = e^{-|x|} \in L_2(-\infty, \infty)$ с преобразованием Фурье

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+t^2}.$$

Согласно лемме 1 имеем

$$A_\sigma(e^{-|x|})_2 = \Big[1 - \frac{2}{\pi}\Big(\operatorname{arctg}\sigma - \frac{\sigma}{1+\sigma^2}\Big)\Big]^{1/2} < \sqrt{\frac{2}{\sigma}}.$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из класса $L_p(-\infty, \infty)$ $(1 < p \leqslant 2)$. Тогда

$$F(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a} f(t)\,e^{ixt}\,dt$$

при $a \to \infty$ сходится в среднем с показателем q, где $q = p / (p-1)$.

Предел в среднем $F(x)$, называемый трансформацией Фурье функции $f(x)$, удовлетворяет неравенству ([6])

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^q\,dx\Big)^{1/q} \leqslant B_{p,q}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p},$$

где $B_{p,q} = (2\pi / q)^{1/2q}(p / 2\pi)^{1/2p}$.

Кроме того, почти для всех x имеем

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{ixt}-1}{it}\,dt, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)\frac{e^{-itx}-1}{-it}\,dt.$$

Благодаря этим утверждениям доказывается

Теорема 2. *Если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ $(1 < p \leqslant 2)$ и $f(x)$ — ее трансформация Фурье в смысле $L_p(-\infty, \infty)$, то имеют место оценки*

$$A_\sigma(f)_p \geqslant B_{p,q}^{-1}\Big(\int\limits_{|x|>\sigma}|F(x)|^q\,dx\Big)^{1/q} \quad (1/p + 1/q = 1),$$

$$\sup_{|y|\leqslant\pi/\sigma}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^q\Big|\sin\frac{yx}{2}\Big|^q\,dx\Big)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2}\,B_{p,q}\,\omega_1\Big(f; \frac{\pi}{\sigma}\Big)_p.$$

Рассуждения, использованные при доказательстве приведенных выше утверждений, могут быть применены также в многомерном случае.

Например, рассмотрим функцию, допускающую представление

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt+iy\tau} \varphi(t, \tau)\, dt d\tau, \tag{9}$$

и целые функции $g_{\sigma_1, \sigma_2}(x, y) \in W^{(p)}_{\sigma_1,\sigma_2}$, допускающие спектральное представление

$$g_{\sigma_1,\sigma_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} \psi(t, \tau)\, e^{ixt+iy\tau}\, dt\, d\tau,$$

где $\psi(t, \tau) \in L_2\begin{pmatrix} -\sigma_1, \sigma_1 \\ -\sigma_2, \sigma_2 \end{pmatrix}$ и $\psi(t, \tau) = 0$ при $(x, y) \overline{\in} \begin{bmatrix} -\sigma_1, \sigma_1 \\ -\sigma_2, \sigma_2 \end{bmatrix}$.

Теорема 3. *Если функция* $f(x, y) \in L_2\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$ *определяется равенством* (9), *то целой функцией из класса* $W^{(2)}_{\sigma_1,\sigma_2}$, *наименее уклоняющейся от нее в смысле метрики* $L_2\begin{pmatrix} -\infty, \infty \\ -\infty, \infty \end{pmatrix}$, *является*

$$g^0_{\sigma_1,\sigma_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{ixt+iy\tau} \varphi(t, \tau)\, dt\, d\tau, \tag{10}$$

где $\varphi(x, y)$ — *преобразование Фурье функции* $f(x, y)$ *в смысле* (9), *причем значение наилучшего приближения* $A_{\sigma_1, \sigma_2}(f_2)$ *функции* $f(x, y)$ *посредством целых функций из класса* $W^{(2)}_{\sigma_1,\sigma_2}$ *вычисляется одним из равенств*

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|\tau| \geqslant \sigma_2} |\varphi(t, \tau)|^2\, dt\, d\tau + \int_{|t| > \sigma_1} \int_{|t| \leqslant \sigma_2} |\varphi(t, \tau)|^2\, dt\, d\tau \right\}^{1/2}, \tag{11}$$

или

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_2 = \left\{ \int_{|t| > \sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t, \tau)|^2\, dt\, dt + \int_{|t| \leqslant \sigma_1} \int_{|\tau| > \sigma_2} |\varphi(t, \tau)|^2\, dt\, d\tau \right\}^{1/2}. \tag{12}$$

Введем обозначения:

$$A_{\sigma_1,\infty}(f)_p = \inf_{g_{\sigma_1,\infty} \in W^{(p)}_{\sigma_1,\infty}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y) - g_{\sigma_1,\infty}(x, y)|^p\, dx\, dy \right)^{1/p} \quad (p \geqslant 1),$$

где $g_{\sigma_1,\infty}(x, y) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt+iy\tau} \varphi(t, \tau)\, dt\, d\tau$

целая функция по x из класса $W^{(p)}_{\sigma_1}$. Аналогично определяется $A_{\infty, \sigma_2}(f)_p$ и доказывается, что

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_2 \leqslant [A^2_{\sigma_1,\infty}(f)_2 + A^2_{\infty,\sigma_2}(f)_2]^{1/2}.$$

Благодаря этому, неравенствам

$$A^2_{\sigma_1,\infty}(f)_2 < \frac{1}{2} \omega_1^2\left(f; \frac{\pi}{\sigma_1}; 0\right)_2; \quad A^2_{\infty,\sigma_2}(f)_2 < \frac{1}{2} \omega_1^2\left(f; 0; \frac{\pi}{\sigma_2}\right)_2$$

получаем

$$A_{\sigma_1,\sigma_2}(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \omega_1^2\left(f; \frac{\pi}{\sigma_1}; 0\right)_2 + \omega_1^2\left(f; 0; \frac{\pi}{\sigma_2}\right)_2 \right\}^{1/2}.$$

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
25 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960. [2] Н. П. Корнейчук, ДАН, 145, 514 (1962). [3] С. Б. Стечкин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 88, 17 (1967). [4] В. И. Бердышев, там же, 88, 3 (1967). [5] Н. И. Черных, там же, 88, 71 (1967). [6] К. И. Бабенко, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 4, 531 (1961).