

В. В. ПАШЕНКОВ

О ТЕОРЕМЕ СТОУНА

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 III 1970)

Условимся под словом пространство понимать хаусдорфово топологическое пространство, обладающее предбазой открыто-замкнутых множеств. Под топологической алгеброй B будем понимать булеву алгебру, являющуюся одновременно пространством, топология которого задается предбазой, состоящей из некоторых ультрафильтров F и их дополнений $I = B \setminus F^*$ (ультраидеалов). Знаки $+$, $\cdot$, $'$, Δ будем употреблять для обозначения операции взятия суммы, пересечения, дополнения и симметрической разности в булевой алгебре соответственно. Теоретико-множественные операции суммы, пересечения и разности будем обозначать соответственно $\cup$, $\cap$, $\setminus$, ϕ — обозначение пустого множества. Нуль и единицу булевой алгебры обозначим через 0 и 1 соответственно.

Определение 1. Систему подмножеств $\{U_\alpha\}$ пространства X назовем определяющей, если совокупность множеств $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus U_\alpha\}$ образует предбазу топологии в X . Каждое из подмножеств U_α и $X \setminus U_\alpha$ назовем отмеченным относительно определяющей системы $\{U_\alpha\}$.

Лемма 1. Пусть I, F_1, F являются соответственно идеалом и фильтрами булевой алгебры B . Если $I \cap F_1 = \phi$ и $I \cap F_1 \subseteq F$, то $F_1 \subseteq F$.

Лемма 2. Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n$ — конечный набор собственных фильтров булевой алгебры A и F — ультрафильтр, отличный от F_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда $F \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n F_i$. Если каждый из фильтров F_i является ультрафильтром,

то, кроме того, $F \not\subseteq \bigcap_{i=1}^n F_i$.

Лемма 3. Алгебраические операции $+$, $\cdot$, $'$, Δ непрерывны в любой топологической алгебре B .

Доказательство. Пусть $a, b, c \in B$, $a = bc$ и U — некоторое открытое множество, содержащее элемент a . Тогда для некоторых открытых ультрафильтров F_i и открытых ультраидеалов I_j будут выполняться соотношения

$$a \in F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_k \subseteq U. \quad (1)$$

Для каждого идеала I_j ввиду его максимальной должно выполняться хотя бы одно из соотношений $b \in I_j$; $c \in I_j$. Пусть $I_{j_1}, I_{j_2}, \dots, I_{j_s}$ — набор всех тех идеалов, которые участвуют в записи (1) и не содержат элемента b . Тогда $c \in I = I_{j_1} \cap \dots \cap I_{j_s}$. Если $k = s$, то примем за V множество $F = B \cap F_1 \cap \dots \cap F_n$; если же $s < k$, то положим $V = F \cap I_0$, где I_0 есть пересечение всех идеалов из (1), отличных от $I_{j_1}, \dots, I_{j_s}$. Ясно, что $b \in V$, $c \in W = I \cap F$ и что для любых элементов $v \in V$ и $w \in W$ справедливо соотношение $v \cdot w \in U$. Если a' есть дополнение элемента a в булевой алгебре B , то множество $H = (B \setminus F_1) \cap \dots \cap (B \setminus F_n) \cap (B \setminus I_1) \cap \dots \cap (B \setminus I_k)$ будет содержать элемент a' и для любого элемента $h \in H$ справедливо соотношение $h' \in U$. Поскольку множества V , W и H открыты, мы доказали тем самым непрерывность операций взятия пересечения и дополнения. Остается заметить, что для любых элементов $a, b \in B$ выполняются равенства $a + b = (a'b')'$ и $a\Delta b = a'b + b'a$.

Лемма 4. Пусть $\{F_\alpha\}$ является определяющей системой ультрафильтров топологической алгебры B и F — некоторый ультрафильтр в B . Следующие условия равносильны: 1. $F \in \{F_\alpha\}$. 2. F открыто-замкнут в B . 3. F замкнут в B . 4. F открыт в B .

* Под ультрафильтром мы понимаем собственный максимальный фильтр.

Доказательство. Следования $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ очевидны.

$3 \Rightarrow 4$. В силу леммы 3 топологическая алгебра B является непрерывной группой относительно операции Δ . Идеал $I = B \setminus F$, будучи открытой в B подгруппой, замкнут. Следовательно, F открыт.

$4 \Rightarrow 1$. Покажем, что если $F \notin \{F_\alpha\}$, то F вообще не может содержать в себе никакого непустого открытого множества. Допустив противное, будем иметь $F \supseteq F_0 \cap I \neq \emptyset$, где F_0 и I — пересечения конечного числа отмеченных ультрафильтров и ультраидеалов соответственно. Но тогда, в силу леммы 1, имеем $F_0 \subseteq F$, что противоречит лемме 2.

Определение 2. Пусть B — топологическая алгебра. Обозначим множество всех ее замкнутых ультрафильтров через $T(B)$. Для каждого элемента $b \in B$ определим подмножество $b_T \subseteq T(B)$, состоящее из всех тех ультрафильтров $F \in T(B)$, которые содержат элемент b . Пусть $b, b_1, b_2, \dots, b_n$ — произвольные элементы топологической алгебры B . Легко проверяются соотношения:

$$(b')_T = T(B) \setminus b_T, \quad (2)$$

$$(b_1 \cdot b_2 \dots b_n)_T = (b_1)_T \cap (b_2)_T \cap \dots \cap (b_n)_T, \quad (3)$$

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)_T = (b_1)_T \cup (b_2)_T \cup \dots \cup (b_n)_T. \quad (4)$$

Легко убедиться также, что если F_1 и F_2 — различные ультрафильтры из $T(B)$, то существует элемент $c \in B$; $c \in F_1 \setminus F_2$. Тогда $F_1 \subseteq c_T$ и $F_2 \subseteq (c')_T$. Поэтому, взяв в качестве определяющей системы во множестве $T(B)$ подмножества b_T для всех $b \in B$, мы превратим $T(B)$ в пространство. Заметим, что подмножества $\{b_T\}$, $b \in B$ образуют в силу соотношений (2) и (3) базу открытых множеств пространства $T(B)$.

Определение 3. Пусть K является подмножеством булевой алгебры B . Множество $K^* = \{b \in B: bc = 0 \text{ для всех } c \in K\}$ назовем дизъюнктивным дополнением множества K . Если $K^{**} = (K^*)^* = K$, то назовем K алгебраической компонентой или просто компонентой булевой алгебры B . Компоненту K назовем главной, если существует такой элемент $c_0 \in K$, что $K = \{b \in B; b \leq c_0\}$. В противном случае назовем компоненту неглавной.

Определение 4. Топологическую алгебру B назовем замкнутой, если для любой ее неглавной компоненты K существует замкнутый в B ультрафильтр F , для которого выполняется соотношение $F \cap K = F \cap K^* = \emptyset$.

Лемма 5. Пусть B — замкнутая топологическая алгебра и U — открыто-замкнутое подмножество в $T(B)$. Тогда существует элемент $b_0 \in B$, для которого $(b_0)_T = U$.

Доказательство. Обозначим через K множество всех тех элементов b_α топологической алгебры B , для которых $(b_\alpha)_T \subseteq U$ и через P — множество всех тех элементов b_β , для которых $(b_\beta)_T \subseteq V = T(B) \setminus U$; $K = \{b_\alpha\}$, $P = \{b_\beta\}$. Заметим, что $\bigcup_\alpha (b_\alpha)_T = U$, $\bigcup_\beta (b_\beta)_T = V$. Докажем равенство

$$P = K^*. \quad (5)$$

Пусть $a \in P$, т. е. $a_T \subseteq V$. Тогда $a_T \cap U = \emptyset$, значит, при всех α $a_T \cap (b_\alpha)_T = \emptyset$, откуда $ab_\alpha = 0$, следовательно, $a \in K^*$. Обратно, пусть $a \in K^*$, т. е. $ab_\alpha = 0$ при всех α . Тогда $a_T \cap (b_\alpha)_T = \emptyset$, откуда $a_T \cap U = \emptyset$, т. е. $a_T \subseteq V$. Следовательно, $a \in P$. Меняя в этом рассуждении роли U и V , мы получаем из (5) $P^* = K$. Следовательно, $K^{**} = (K^*)^* = P^* = K$, т. е. K есть компонента. Поскольку $U \cup V = T(B)$, каждый замкнутый ультрафильтр F топологической алгебры B принадлежит либо множеству U , либо множеству V . Но это означает, что либо $F \cap K \neq \emptyset$ либо $F \cap K^* \neq \emptyset$. Поэтому, в силу замкнутости топологической алгебры B , компонента K является главной. Пусть $b_0 \in K$ и при всех α $b_0 \geq b_\alpha$. Тогда ясно, что $(b_0)_T = U$.

Определение 5. Пусть X — пространство. Булеву алгебру всех его открыто-замкнутых подмножеств, упорядоченных по включению, обозна-

чим через $A(X)$. Обозначим через F_x ультрафильтр булевой алгебры $A(X)$, состоящий из всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X , содержащих точку $x \in X$. Введем в $A(X)$ топологию, приняв за определяющую систему множества F_x для всех $x \in X$. Ясно, что это будет хаусдорфова топология. Поэтому, алгебра $A(X)$ будет топологической алгеброй.

Лемма 6. *Для любого пространства X топологическая алгебра $A(X)$ является замкнутой.*

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению леммы, $K = \{a_\alpha\}$ является такой неглавной компонентой топологической алгебры $A(X)$, что в $A(X)$ не существует замкнутого ультрафильтра F , для которого $F \cap K = F \cap K^* = \emptyset$. Пусть $K^* = \{a_\beta\}$. Рассматривая элементы топологической алгебры как подмножества пространства X , образуем множества $U = \bigcup_\alpha a_\alpha$ и $V = \bigcup_\beta a_\beta$. Легко видеть, что $U \cap V = \emptyset$. Покажем, что $U \cup V = X$. В самом деле, любой замкнутый ультрафильтр F в $A(X)$ по лемме 4 является отмеченным $F = F_x$. Если $F_x \cap K \neq \emptyset$, то для некоторого $a_\alpha \in K$ мы имеем $a_\alpha \in F_x$, откуда $x \in a_\alpha$. Если $F_x \cap K^* \neq \emptyset$, то аналогично получаем $x \in a_\beta$. Таким образом, любая точка $x \in X$ входит во множество $U \cup V$, т. е. $U \cup V = X$. Поскольку каждое из множеств U и V является открытым, U открыто-замкнуто, и, значит, $U = a$ для некоторого $a \in A(X)$. Поскольку $U a_\beta = 0$ при всех β , мы имеем $U = a \in K^{**} = K$, кроме того, $U = a \geq a_\alpha$ при всех α , значит, компонента K есть главная, что противоречит нашему предположению.

Теорема 1. *Любое пространство X гомеоморфно пространству $T(A(X))$. Любая замкнутая топологическая алгебра B топологически изоморфна топологической алгебре $A(T(B))$.*

Доказательство. Поставим в соответствие каждой точке x пространства X замкнутый ультрафильтр $\varphi(x) = F_x$ топологической алгебры $A(X)$. Так как элементы топологической алгебры $A(X)$ образуют базу в X , то при $x_1 \neq x_2$ будет $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Поскольку каждый замкнутый ультрафильтр F топологической алгебры $A(X)$ ввиду леммы 4 является отмеченным $F = F_x$ для некоторого $x \in X$, мы отобразим этим пространством X на все пространство $T(A(X))$. Легко убедиться, что для любого открыто-замкнутого подмножества $a \subseteq X$, $a \in A(X)$ справедливо соотношение $\varphi(a) = a_T$. Так как подмножество $a \subseteq X$ образуют базу в пространстве X , а подмножества $\varphi(a) = a_T$ образуют базу в пространстве $T(A(X))$, то отображение φ является гомеоморфизмом.

Пусть теперь топологическая алгебра B замкнута. Поставим в соответствие каждому элементу $b \in B$ множество $f(b) = b_T$; $b_T \subseteq T(B)$. Ясно, что при $b_1 \neq b_2$ будет $f(b_1) \neq f(b_2)$. Так как, ввиду замкнутости топологической алгебры B по лемме 5 каждое открыто-замкнутое подмножество пространства $T(B)$ имеет вид b_T , где $b \in B$, то f отображает B на всю топологическую алгебру $A(T(B))$. Кроме того, в силу соотношений (2), (3), (4), f есть алгебраический изоморфизм. Следовательно, f переводит ультрафильтры алгебры B в ультрафильтры алгебры $A(T(B))$. Пусть $F = \{b_\alpha\}$ — замкнутый ультрафильтр топологической алгебры B . Тогда $H = f(F)$ состоит из подмножеств $(b_\alpha)_T$, являющихся открыто-замкнутыми в пространстве $T(B)$. Из включения $b_\alpha \in F$ следует $F \subseteq (b_\alpha)_T$ при всех α . Значит, ультрафильтр H состоит из подмножеств, содержащих точку F пространства $T(B)$, т. е. H является отмеченным, а значит, и открыто-замкнутым. Обратно, если $H = \{(b_\alpha)_T\}$ открыто-замкнут в топологической алгебре $A(T(B))$, то, по лемме 4, H — отмеченный ультрафильтр, т. е. существует такая точка F_1 пространства $T(B)$ (F_1 есть замкнутый ультрафильтр в B), что $F_1 \subseteq (b_\alpha)_T$ при всех α , значит, $F_1 \supseteq b_\alpha$, и, следовательно, $F_1 \supseteq F$, откуда $F_1 = F$. Таким образом, $f^{-1}(H) = F$ есть открыто-замкнутое в топологической алгебре B множество. Тем самым мы доказали топологичность изоморфизма f .

Следствие 1. *Каждому пространству X соответствует ввиду леммы 6 замкнутая топологическая алгебра $A(X)$. Каждой замкнутой топологиче-*

ской алгебре B соответствует пространство $T(B)$. Эти соответствия взаимно обратны и взаимно однозначны.

Следствие 2. Бикомпактность пространства X равносильна тому, что в топологической алгебре $A(X)$ все ультрафильтры отмечены. В этом случае любая топологическая алгебра замкнута, и наша теорема превращается в классическую теорему Стоуна.

Теорема 2. Следующие условия равносильны: 1. Пространство X дискретно. 2. Топология топологической алгебры $A(X)$ совпадает с интервальной. 3. Топология топологической алгебры $A(X)$ бикомпактна.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Заметим, что топология любой топологической алгебры A сильнее (не слабее) интервальной. Пусть X дискретно. Тогда любой замкнутый ультрафильтр в $A(X)$ имеет вид $[p, 1]$, где p — атом в $A(X)$, а его дополнение — вид $[0, p']$, которые, очевидно, замкнуты в интервальной топологии.

$2 \Rightarrow 1$. Достаточно показать, что любой замкнутый в интервальной топологии ультрафильтр является главным. Пусть $F \subseteq A(X)$ есть замкнутый ультрафильтр, не являющийся главным. Имеем $F = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha}$, где

$$K_{\alpha} = [a_1^{\alpha}, b_1^{\alpha}] \cup [a_2^{\alpha}, b_2^{\alpha}] \cup \dots \cup [a_{n(\alpha)}^{\alpha}, b_{n(\alpha)}^{\alpha}]$$

и при всех α число $n(\alpha)$ конечно. Если среди элементов $a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}, \dots, a_{n(\alpha)}^{\alpha}$ нет нулевого, то все фильтры $[a_1^{\alpha}, 1], \dots, [a_{n(\alpha)}^{\alpha}, 1]$ являются собственными и отличными от F фильтрами. Поэтому, ввиду леммы 2, мы имеем

$$F \not\subseteq [a_1^{\alpha}, 1] \cup \dots \cup [a_{n(\alpha)}^{\alpha}, 1],$$

откуда $F \not\subseteq K_{\alpha}$, что противоречит $F = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha} \subseteq K_{\alpha}$. Значит, при всех α получаем $0 \in K_{\alpha}$, откуда $0 \in \bigcap_{\alpha} K_{\alpha} = F$, что невозможно.

$1 \Rightarrow 3$. Если пространство X дискретно, то булева алгебра $A(X)$ полна, и по доказанному топология на $A(X)$ совпадает с интервальной. Значит (1) , $A(X)$ бикомпактна.

$3 \Rightarrow 1$. Покажем, что любой замкнутый ультрафильтр топологической алгебры $A(X)$ является главным. Допустим, что F — замкнутый ультрафильтр, не являющийся главным; $\{F_{\alpha}\}$ — совокупность всех отличных от F замкнутых ультрафильтров. Докажем, что

$$F \subseteq \bigcup_{\alpha} F_{\alpha}. \quad (6)$$

В самом деле, для любого элемента $a \in F$ можно найти такие элементы $b \in A(X)$ и $c \in A(X)$, что $b \neq a$, $c \neq a$ и $b + c = a$. Тогда в F входит один из элементов b, c . Пусть, например, $b \in F$. В силу хаусдорфовости топологической алгебры $A(X)$ существует замкнутый ультрафильтр F_{α} , содержащий элемент c . Тогда $F_{\alpha} \neq F$ и $F_{\alpha} \ni a$. Ввиду произвольности элемента a соотношение (6) доказано. Однако, по лемме 2, из покрытия (6) замкнутого множества F нельзя выделить конечного подпокрытия, что противоречит бикомпактности топологической алгебры $A(X)$.

Поступило
18 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Биркгоф, Теория структур, 1952, стр. 97, теорема 15.