Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 5

УДК 517.94 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ОЛЕЙНИКОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ НЕПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 III 1970)

Пусть k — некоторое подполе поля аналитических функций комплексной переменной z, замкнутое относительно операции дифференцирования. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = p_0, \tag{1}$$

в левой части которого стоит линейный однородный дифференциальный полином $L(y)$ порядка $n \geqslant 1$ с коэффициентами $p_1, \ldots, p_n \in k$, правая часть p_0 также принадлежит полю k. Уравнение (1) называется дифференциально приводимым, если оно имеет решение y_0, трансцендентное над k, удовлетворяющее уравнению

$$R(y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0, \tag{2}$$

в левой части которого стоит дифференциальный полином $R(y)$ (не обязательно линейный) порядка $m < n$ с коэффициентами из k. В противном случае уравнение (1) называется дифференциально неприводимым. Ясно, что уравнение порядка $n = 1$ всегда дифференциально неприводимо. Поэтому в дальнейшем считаем, что $n \geqslant 2$. В приложениях в качестве поля k, как правило, рассматривается поле рациональных функций, которое, очевидно, замкнуто относительно операции дифференцирования.

Понятие дифференциальной неприводимости линейного уравнения играет важную роль в теории трансцендентных чисел. В 1929 г. К. Зигель [1] создал аналитический метод, который позволил свести вопрос о трансцендентности и алгебраической независимости значений одного класса целых функций, названных E-функциями, к исследованию дифференциально-алгебраических свойств самих функций. Работа, начатая К. Зигелем, была завершена А. Б. Шидловским. Теорема Шидловского [2] в применении к E-функции $f(z)$, удовлетворяющей уравнению (1), утверждает, что числа $f(\alpha), f'(\alpha), \ldots, f^{(n-1)}(\alpha)$ при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$, отличном от полюсов $p_0, p_1, \ldots, p_n$, алгебраически независимы тогда и только тогда, когда функции $f(z), f'(z), \ldots, f^{(n-1)}(z)$ алгебраически независимы над полем рациональных функций. Один из способов проверки этого свойства функции $f(z)$ состоит в доказательстве дифференциальной неприводимости уравнения (1).

В качестве приложения своего метода К. Зигель рассмотрел функции

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots,$$

являющиеся решением дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z} y' + y = 0, \tag{3}$$

где λ — комплексный параметр. Он доказал, что если λ не равно половине нечетного числа, то уравнение (3) дифференциально неприводимо. Используя это утверждение и указанный выше метод, К. Зигель получил следующую теорему:

Пусть λ — рациональное число, не равное половине нечетного. Тогда числа $K_\lambda(\alpha)$ и $K_\lambda'(\alpha)$ трансцендентны и алгебраически независимы при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$.

В дальнейшем в работах А. Б. Шидловского и других авторов ([3-5]) был рассмотрен более обширный класс функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2-го и 3-го порядка. Установив дифференциальную неприводимость этих уравнений и используя теорему Шидловского, удалось получить ряд аналогичных теорем о трансцендентности и алгебраической независимости значений соответствующих функций и их производных. Приведем один из результатов, полученных А. Б. Шидловским в работе ([3]).

Рассмотрим функцию

$$K_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\lambda+1)\dots(\lambda+n)(\mu+1)\dots(\mu+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

являющуюся решением дифференциального уравнения

$$y''+\frac{2\lambda+2\mu+1}{z}y'+\left(1+\frac{4\lambda\mu}{z^2}\right)y=\frac{4\lambda\mu}{z^2}. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Если λ и μ — рациональные числа, отличные от отрицательных целых, для которых разность $\lambda-\mu$ не равна половине нечетного числа, а $\alpha\neq 0$ — любое алгебраическое число, то числа $K_{\lambda,\mu}(\alpha)$ и $K'_{\lambda,\mu}(\alpha)$ алгебраически независимы.*

Первым и весьма важным шагом при доказательстве дифференциальной неприводимости линейного уравнения в указанных работах является переход от решений уравнения (1) к решениям однородного уравнения $L(y)=0$. Этот переход позволяет в дальнейшем решать задачу о дифференциальной неприводимости линейного однородного уравнения в классе однородных алгебраических дифференциальных уравнений $R(y)=0$. Метод, использованный К. Зигелем, осуществляет указанный переход только для уравнений 2-го порядка. В 1969 г. Ю. В. Нестеренко ([5]) показал, что аналогичный переход к однородным уравнениям возможен и в случае линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Существенным недостатком полученных теорем является их необратимость. Это обстоятельство в большинстве случаев не позволяет дать полное описание всех значений параметров, при которых исследуемое уравнение дифференциально неприводимо. В частности, теорема 1 не дает полного описания значений λ, μ, при которых числа $K_{\lambda,\mu}(\alpha)$ и $K'_{\lambda,\mu}(\alpha)$ алгебраически независимы.

В настоящей работе будет сформулирована и доказана теорема об обратимом переходе к однородным уравнениям. В приложениях к конкретным уравнениям 2-го порядка эта теорема позволяет дать полное описание значений параметров, при которых рассматриваемое уравнение дифференциально неприводимо.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$L_1(y)=0 \qquad (5)$$

с коэффициентами из поля k порядка $l\geqslant 2$. Уравнение (5) называется однородно приводимым, если оно имеет решение y_0, трансцендентное над k, удовлетворяющее уравнению $Q(y)=0$, в левой части которого стоит дифференциальный полином Q порядка $m<l$ (не обязательно линейный) с коэффициентами из k, однородный по совокупности $y, y', \dots, y^{(m)}$.

В дальнейшем будем полагать в уравнении (1) свободный коэффициент $p_0\neq 0$. Разделив обе части уравнения на этот коэффициент, дифференцируя по z и снова умножая на p_0, мы получим линейное однородное дифференциальное уравнение (5), левая часть которого имеет вид: $L_1(y)=p_0(p_0^{-1}L(y))'=y^{(n+1)}+\dots$ и, следовательно, есть не равный тождественному нулю линейный однородный дифференциальный полином порядка $l=n+1$. Полученное уравнение по отношению к уравнению (1) будем называть объемлющим.

Замечание 1. Ясно, что все решения уравнения (1) удовлетворяют объемлющему его уравнению (5). Боле того, как известно, все решения уравнения (1) описываются формулой $c_1y_1+\ldots+c_ny_n+y_{n+1}$, где $y_1,\ldots,y_{n+1}$ — линейно независимые частные решения, а $c_1,\ldots,c_n$ — произвольные постоянные. Тогда нетрудно видеть, что каждое решение объемлющего уравнения (5) имеет вид $c_1y_1+\ldots+c_ny_n+c_{n+1}y_{n+1}$, где $c_1,\ldots,c_n,c_{n+1}$ — произвольные постоянные. Указанное свойство объемлющего уравнения может быть взято в качестве его определения.

Теорема 2. *Линейное неоднородное уравнение* (1) *дифференциально приводимо тогда и только тогда, когда объемлющее его уравнение* (5) *однородно приводимо.*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) дифференциально приводимо, т. е. имеет трансцендентное решение y_0, удовлетворяющее уравнению (2) порядка $m<n$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что дифференциальный полином $R(y)$, стоящий в левой части уравнения (2), неприводим (в обычном алгебраическом смысле), как полином от $y,y',\ldots,y^{(m)}$ над полем k. Вычисляя полную производную полинома $R(y)$ по z, мы получим дифференциальный полином $R'(y)$ порядка $m+1$, корнем которого является y_0. Нетрудно видеть, что этот полином отличен от тождественного нуля и фактически содержит $y^{(m+1)}$. Поскольку степень $R'(y)$ по совокупности $y,y',\ldots,y^{(m+1)}$ не превосходит степени полинома $R(y)$, который не содержит $y^{(m+1)}$, то эти два полинома взаимно просты. Введем вспомогательную функцию $u=y'y^{-1}$ и выразим через $y,u,u',\ldots,u^{(m)}$ все производные y до $m+1$-й включительно: $y'=uy$, $y''=y(u^2+u'),\ldots$. Легко проверить, что полученное преобразование

$$y,y',\ldots,y^{(m+1)}\to y,u,\ldots,u^{(m)} \tag{6}$$

полиномиально. Переходя с помощью (6) в полиномах $R(y)$ и $R'(y)$ от функций $y,y',\ldots,y^{(m+1)}$ к функциям $y,u,\ldots,u^{(m)}$, получим два полинома K и K_1 от $y,u,u',\ldots,u^{(m)}$, которые обращаются в нуль при подстановке $y=y_0$, $u=u_0=y_0'y_0^{-1}$. Заметим, что $u,u',\ldots,u^{(m)}$ могут быть представлены в виде рациональных функций от $y,y',\ldots,y^{(m+1)}$, знаменатель которых зависит только от y:

$$u=y'y^{-1},\quad u'=[y''y-(y')^2]y^{-2},\ldots. \tag{7}$$

Следовательно, преобразование (6) бирационально над полем k и биполиномиально над его трансцендентным расширением $k[y]$. Первое свойство преобразования (6) показывает, что $K\not\equiv K_1\not\equiv 0$, так как $R\not\equiv R'\not\equiv 0$. Второе свойство показывает, что K и K_1 взаимно просты как полиномы от $u,u',\ldots,u^{(m)}$ над полем $k[y]$. Следовательно, общие множители K и K_1, как полиномов от $y,u,u',\ldots,u^{(m)}$, зависят только от y. Так как y_0 — трансцендентная над k функция, то эти множители не могут иметь y_0 своим корнем. Поэтому, сокращая K и K_1 на общие множители, мы получим два взаимно простых над k полинома от $y,u,\ldots,u^{(m)}$, обращающихся в нуль при $y=y_0$, $u=y_0'y_0^{-1}$. Исключая из этих полиномов y, получим не равный тождественному нулю дифференциальный полином $\bar{Q}(u)$ порядка $\leqslant m$, корнем которого является функция u_0. Заметим теперь, что в равенствах (7) правые части представляют собой отношение двух однородных полиномов от $y,y',\ldots,y^{(m+1)}$ равных степеней, причем знаменатель есть просто степень y. Поэтому, переходя с помощью (7) в полиноме $\bar{Q}(u)$ к неизвестным $y,y',\ldots,y^{(m+1)}$ и умножая его на подходящую степень y, мы получим дифференциальный полином $Q(y)$ порядка $\leqslant m+1$, однородный по совокупности $y,y',\ldots,y^{(m+1)}$, корнем которого является функция y_0. Поскольку $n>m$, то порядок объемлющего уравнения (5) $n+1>m+1\geqslant$ порядка полинома $Q(y)$. Так как y_0 есть решение уравнения (5), то тем самым доказано, что это уравнение однородно приводимо.

Достаточность. Пусть объемлющее уравнение (5) однородно приводимо, т. е. имеет трансцендентное решение y_0, удовлетворяющее однородному дифференциальному уравнению $Q(y)=0$ порядка $m<n+1$.

В силу замечания 1 существует постоянная $c \neq 0$ такая, что функция cy_0 есть корень уравнения (1) ($c = c_{n+1}^{-1}$ при $c_{n+1} \neq 0$ и $c = 1$ при $c_{n+1} = 0$). Так как полином $Q(y)$ однороден по совокупности $y, y', \ldots, y^{(m)}$, то cy_0 является также и его корнем. Поскольку уравнение (1) неоднородно, $p_0 \neq 0$, то полиномы $Q(y)$ и $L(y) - p_0$ взаимно просты над k. Порядок каждого из них $\leqslant n$. Исключая из этих двух полиномов $y^{(n)}$, получим дифференциальный полином $R(y) \neq 0$ порядка $< n$, корнем которого является cy_0. Следовательно, уравнение (1) дифференциально приводимо. Теорема 2 доказана.

Формулировка доказанной теоремы может быть усилена, если ввести понятие классов приводимости. Классом приводимости $\mathbf{D}$ уравнения (1) назовем совокупность всех его трансцендентных решений, удовлетворяющих алгебраическим дифференциальным уравнениям (2) порядка $< n$. Однородным классом приводимости $\mathbf{O}$ объемлющего уравнения (5) назовем совокупность всех его трансцендентных решений, удовлетворяющих алгебраическим однородным дифференциальным уравнениям порядка $< n + 1$.

Теорема 3. *Классы* $\mathbf{D}$ *и* $\mathbf{O}$ *с точностью до постоянных ненулевых множителей совпадают.*

Действительно, при доказательстве необходимости теоремы 2 было показано, что если $y_0 \in \mathbf{D}$, то $y_0 \in \mathbf{O}$. При доказательстве достаточности установлено, что из $y_0 \in \mathbf{O}$ следует $cy_0 \in \mathbf{D}$, при $c \neq 0$.

Замечание 2. Теоремы 2 и 3 доказаны в предположении, что уравнение (1) неоднородно, $p_0 \neq 0$. Для исследования однородного уравнения (1) с помощью полученных теорем необходимо сделать замену $y \to y + p$, где $p \in k$ и не является решением уравнения (1). Тогда уравнение (1) перейдет в неоднородное, которое, как легко убедиться, дифференциально приводимо тогда и только тогда, когда дифференциально приводимо исходное однородное уравнение.

Теорема 2 позволяет дать полное описание значений параметров λ, μ, при которых уравнение (4) дифференциально неприводимо. По теореме 2 уравнение (4) дифференциально приводимо тогда и только тогда, когда однородно приводимо объемлющее уравнение

$$y''' + \frac{2\lambda + 2\mu + 3}{z} y'' + \left(1 + \frac{4\lambda\mu + 2\lambda + 2\mu + 1}{z^2}\right) y' + \frac{2}{z} y = 0.$$

Используя методы работ ([4], [6]), можно показать, что последнее уравнение однородно приводимо тогда и только тогда, когда пара λ, μ с точностью до перестановки имеет вид n_1, $n_2 + {}^1\!/_2$, где n_1, n_2 — целые. Отсюда следует:

Теорема 4. *Уравнение* (4) *дифференциально неприводимо тогда и только тогда, когда пара* λ, μ *не совпадает ни с одной из пар чисел* n_1, $n_2 + {}^1\!/_2$, *где* n_1, n_2 — *целые.*

Используя теоремы Шидловского и теорему 4, получаем следующее утверждение:

Теорема 5. При *рациональных* λ, μ, *удовлетворяющих условиям теоремы* 4, *числа* $K_{\lambda,\mu}(\alpha)$ *и* $K'_{\lambda\mu}(\alpha)$ *алгебраически независимы при любом алгебраическом* $\alpha \neq 0$ *.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Siegel, Abhandl. Preuss. Acad. Wiss., № 1 (1929—1930). [2] А. Б. Шидловский, ДАН, 100, № 2 (1955). [3] А. Б. Шидловский, ДАН, 169, № 1 (1966). [4] В. А. Олейников, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1, 63 (1968). [5] Ю. В. Нестеренко, Матем. заметки, 5, № 5 (1969). [6] В. А. Олейников, Матем. сборн., 78(120), 2 (1969). [7] И. И. Белогривов, Кандидатская диссертация, М., 1967.

* Эта теорема впервые была получена И. И. Белогривовым ([7]) арифметическим методом.