Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 519.46 *МАТЕМАТИКА*

И. Н. БЕРНШТЕЙН, член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД,
С. И. ГЕЛЬФАНД

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ОСНОВНОМ АФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа Ли ранга r над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, B — ее борелевская подгруппа, N — унипотентный радикал B, H — картановская подгруппа, содержащаяся в B.

Фундаментальную роль в теории представлений играет пространство $A = N \setminus G$ — основное афинное пространство группы G. A является алгебраическим многообразием. Целью этой работы является изучение пространства дифференциальных операторов с регулярными коэффициентами на A. Точное определение регулярного дифференциального оператора см. ([1]).

По каждой функции $f(g)$ на группе G будет построен набор регулярных дифференциальных операторов на A. Кроме того, мы покажем, что таким образом можно получить все дифференциальные операторы на A. Для построения вводится операция π_*, отображающая функции на G в функции на A, которая представляет, по нашему мнению, самостоятельный интерес. Эта операция является алгебраическим аналогом операции усреднения по подгруппе (в данном случае унипотентной). Замечательно, что π_* переводит операцию умножения на функцию $f(g)$ в «почти» дифференциальный оператор на A. Точные формулировки даны в теоремах 1 и 2.

1. Обозначим через $\mathscr{E}(G)$ и $\mathscr{E}(A)$ пространства регулярных функций на алгебраических многообразиях G и A. Определим представления R^G и R^A группы G в этих пространствах правыми сдвигами

$$(R^G_{g_0}f)(g) = f(gg_0), \quad (R^A_{g_0}\varphi)(x) = \varphi(xg_0), \quad g, g_0 \in G, \ x \in A.$$

Тогда каждое неприводимое инвариантное подпространство в этих пространствах конечномерно. Мы можем также ввести представления L^G группы G в $\mathscr{E}(G)$ и L^A группы H в $\mathscr{E}(A)$ левыми сдвигами

$$(L^G_{g_0}f)(g) = f(g_0^{-1}g), \quad (L^A_h\varphi)(x) = \varphi(h^{-1}x), \quad g, g_0 \in G, \ h \in H, \ x \in A;$$

элемент $h^{-1}x$ определен, так как H нормализует N.

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра, соответствующая H, $\mathfrak{N}$ — алгебра Ли группы N. Пусть α_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — все положительные корни $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{G}$, $E_i \in \mathfrak{N}$ соответствующие корневые вектора, E_{-i} — корневые вектора с весами α_i.

Дифференцируя представления L^G и L^A, мы можем рассматривать элементы $\mathfrak{G}$ как правоинвариантные дифференциальные операторы первого порядка на G, а элементы из $\mathfrak{h}$ как дифференциальные операторы первого порядка на A.

2. Операция π_*. Обозначим через π: $G \to A = N \setminus G$ естественную проекцию и через π^*: $\mathscr{E}(A) \to \mathscr{E}(G)$ отображение, задаваемое формулой $(\pi^*\varphi)(g) = \varphi(\pi g)$. Тогда ясно, что $R_g{}^G\pi^* = \pi^*R_g{}^A$ и $L_h{}^G\pi^* = \pi^*L_h{}^A$. Заметим, кроме того, что π^* — мономорфизм и $f \in \operatorname{Im}\pi^*$ тогда и только тогда, когда $E_if = 0$ для всех i.

Лемма — определение. *Существует единственное отображение* $\pi_*\colon \mathscr{E}(G)\to\mathscr{E}(A)$ *такое, что*

1) $\pi_* R_g^G = R_g^A \pi_*$ *и* $\pi_* L_h^G = L_h^A \pi_*$ *для всех* $g\in G$, $h\in H$;

2) $\pi_*\pi^*\varphi=\varphi$ *для всех* $\varphi\in\mathscr{E}(A)$.

Доказательство. Докажем, что $\pi_* f$ однозначно определяется условиями 1) и 2). Каждая регулярная функция на G лежит в конечномерном неприводимом инвариантном относительно L^G подпространстве. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда f лежит в неприводимом инвариантном относительно L^G подпространстве V и является весовой функцией веса χ относительно ограничения L^G на H. Если χ — старший вес данного неприводимого представления, то $f\in \operatorname{Im}\pi^*$, т. е. $f=\pi^*\varphi$, $\varphi\in\mathscr{E}(A)$ и, ввиду 2), $\pi_* f=\varphi$.

Пусть теперь χ — не старший вес. Обозначим через f_0 вектор старшего веса в V и через χ_0 — этот старший вес. Тогда f и f_0 меняются под действием R^G по одному и тому же неприводимому представлению G. Из 1) и из того, что каждое неприводимое представление G входит в $\mathscr{E}(A)$ только один раз ([1], лемма 4.1), следует, что $\pi_* f$ и $\pi_* f_0$ лежат в одном и том же неприводимом инвариантном относительно R^G подпространстве. Но тогда веса $\pi_* f$ и $\pi_* f_0$ относительно L^A совпадают ([1] лемма 4.2). Из 1) следует, что вес $\pi_* f$ равен χ, а вес $\pi_* f_0$ равен $\chi_0\neq\chi$. Так как $\pi_* f_0\neq 0$, то $\pi_* f=0$.

Из этого доказательства сразу следует и построение π_*. А именно, если f — весовой вектор не старшего веса, лежащий в неприводимом инвариантном относительно L^G подпространстве, то полагаем $\pi_* f=0$. Если же f — вектор старшего веса, то $f=\pi\varphi$ и мы полагаем $\pi_* f=\varphi$. Лемма доказана.

Из конструкции π_* видно, что $\pi_*(\hat{E}_i f)=0$ для любой функции $f\in\mathscr{E}(G)$.

3. Конструкция с помощью π_* дифференциальных операторов на A. Пусть Wu — обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Сопоставим каждому элементу $w\in Wu$ правоинвариантные дифференциальные операторы в пространствах $\mathscr{E}(G)$ и $\mathscr{E}(A)$, которые будем обозначать той же буквой w. Имеют место равенства $w\pi^*=\pi^* w$, $\pi_* w = w\pi_*$.

Пусть $f\in\mathscr{E}(G)$. Определим в пространстве $\mathscr{E}(A)$ оператор $\bar{f}$ формулой $\bar{f}(\varphi)=\pi_*(f\cdot\pi^*\varphi)$, $\varphi\in\mathscr{E}(A)$.

Теорема 1. *Существует такой ненулевой элемент* $w\in Wu$, *что* $w\bar{f}$ — *регулярный дифференциальный оператор на* A.

Доказательство. Назовем цепочкой дифференциальный оператор D на G вида $E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_s}$ и весом такой цепочки назовем вес $\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_s}$. Обозначим через Ξ множество всех цепочек D таких, что $Df\neq 0$, а через Ξ_0 — множество их весов. Очевидно, что Ξ и Ξ_0 — конечные множества. Для любой функции $\varphi\in\mathscr{E}(A)$ и цепочки D $D(f\cdot\pi^*\varphi)=Df\cdot\pi^*\varphi$, так как $E_i\pi^*\varphi=0$. Поэтому, если $D\notin\Xi$, то $D(f\pi_*\varphi)=0$. Обозначим через U подпространство в $\mathscr{E}(G)$, состоящее из всех функций u, для которых $D(u)=0$ для любой цепочки $D\notin\Xi$.

Лемма. *Существует такой регулярный дифференциальный оператор* T *на* G *и такой элемент* $w\in Wu$, *что для всех* $u\in U$ *выполнено равенство*

$$Tu = w\pi^*\pi_* u.$$

Теорема сразу следует из леммы, так как для любой функции $\varphi\in\mathscr{E}(A)$ $f\cdot\pi^*\varphi\in U$ и, значит,

$$T(f\pi^*\varphi)=w\pi^*\pi_*(f\cdot\pi^*\varphi)=\pi^* w\bar{f}(\varphi),$$

т. е. $T\circ f\circ\pi^*=\pi^*\circ w\circ\bar{f}$. Из этого равенства видно, что дифференциальный оператор $T\circ f$ сохраняет $\pi^*\mathscr{E}(A)\subset\mathscr{E}(G)$ и, значит, $w\circ\bar{f}$ — дифференциальный оператор на A.

Доказательство леммы. Пусть $H_1,\ldots,H_r$ — базис в $\mathfrak{h}$. Элементы из Wu являются полиномами от H_i, и мы будет их рассматривать как полиномиальные функции на $\mathfrak{h}^*$. Пусть Δ — оператор Лапласа второго порядка на G (построенный по форме Киллинга). Тогда существует такой элемент $P \in Wu$, что для любого вектора старшего веса $\Psi \in \mathscr{E}(G)$ выполнено равенство $\Delta\Psi = P\Psi$ или, эквивалентно, $\Delta\Psi = P(\chi_0)\Psi$, где χ_0 — вес вектора Ψ.

Пусть $B(H)$ — ограничение формы Киллинга алгебры $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{h}$, $Q(\chi)$ — двойственная квадратичная форма на $\mathfrak{h}^*$. Из результатов Хариш-Чандра [2] следует, что $P(\chi) = Q(\chi + \rho) - Q(\rho)$, где ρ — полусумма положительных корней.

Для любого веса β обозначим через P_β и w_β элементы из Wu, соответствующие полиномиальным функциям $P_\beta(\chi) = P(\chi + \beta)$ и $w_\beta(\chi) = 2\langle\beta, \chi + \rho\rangle + \langle\beta, \beta\rangle$. ($\langle,\rangle$ — скалярное произведение в $\mathfrak{h}^*$, соответствующее квадратичной форме Q). Пусть $T = \prod\limits_\beta (P_\beta - \Delta)$, $w = \prod\limits_\beta w_\beta$, где β пробегает $\Xi_0 \setminus 0$.

Покажем, что для всех $u \in U$ выполняется равенство $Tu = w\pi^*\pi_*u$.

Ясно, что это равенство достаточно проверить, когда u — весовой вектор, лежащий в неприводимом инвариантном относительно L^G подпространстве V. Пусть u_0 — вектор старшего веса в V, χ и χ_0 — веса u и u_0 относительно $\mathfrak{h}$. Из единственности вектора старшего веса следует, что $u_0 = cDu$, где D — некоторая цепочка, $c \in K$, и потому $\chi_0 - \chi \in \Xi_0$.

1 случай. $\chi \neq \chi_0$. Ограничение Δ на V является умножением на $P(\chi_0)$. Поэтому

$$(P_\beta - \Delta)u = (P_\beta(\chi) - P(\chi_0))u = (P(\chi + \beta) - P(\chi_0))u = 0,$$

если $\beta = \chi_0 - \chi \in \Xi_0 \setminus 0$. Значит, $Tu = 0$. Так как в случае 1 $\pi_*u = 0$, то и $w\pi^*\pi_*u = 0$ и, значит, $Tu = w\pi^*\pi_*u$.

2 случай. $\chi = \chi_0$. Тогда,

$$(P_\beta - \Delta)u = (P(\chi_0 + \beta) - P(\chi_0))u = (Q(\chi_0 + \beta + \rho) - Q(\chi_0 - \beta))u = \\ = (2\langle\chi_0 + \rho, \beta\rangle + \langle\beta, \beta\rangle)u = w_\beta(\chi_0)u.$$

Значит, $Tu = (\prod (P_\beta - \Delta))u = \prod w_\beta(\chi_0)u = wu = w\pi^*\pi_*u$.

Доказательство леммы, а тем самым и теоремы 1, закончено.

Можно показать, что порядок оператора $w\bar{f}$ равен $\nu(\Xi_0) - 1$, т. е. порядку w. ($\nu(\Xi_0)$ — число элементов Ξ_0).

Теорема 2. *Каждый регулярный дифференциальный оператор $\mathscr{D}$ на A представим в виде*

$$\mathscr{D} = \Sigma w_j\bar{f}_j \quad \text{где } w_j \in Wu, \quad f_j \in \mathscr{E}(G).$$

Доказательство. Как показано в ([1], § 8) регулярный дифференциальный оператор $\mathscr{D}$ на A продолжается до регулярного дифференциального оператора $\tilde{\mathscr{D}}$ на G (т. е. $\tilde{\mathscr{D}}\pi^*\varphi = \pi^*\mathscr{D}\varphi$ для всех $\varphi \in \mathscr{E}(A)$). Оператор $\tilde{\mathscr{D}}$, как и всякий дифференциальный оператор на G, можно представить в виде

$$\tilde{\mathscr{D}} = \Sigma s_j(g)P_j,$$

где P_j — элементы обертывающей алгебры $\mathfrak{G}$, $s_j \in \mathscr{E}(G)$. Простыми преобразованиями $\tilde{\mathscr{D}}$ можно привести к виду $\tilde{\mathscr{D}} = \Sigma w_jf_j + \Sigma A_iE_i + \Sigma\hat{E}_iB_i$, где A_i и B_i — некоторые дифференциальные операторы на G, $w_j \in Wu$, $f_j \in \mathscr{E}(G)$.

Так как $E_i\pi^*\varphi = 0$ и $\pi_*\hat{E}_if = 0$, то $\mathscr{D}\varphi = \pi_*\pi^*\mathscr{D}\varphi = \pi_*\tilde{\mathscr{D}}\pi^*\varphi = \Sigma w_j\pi_*(f_j\pi^*\varphi) = \Sigma w_j\bar{f}_j(\varphi)$, что доказывает теорему 2.

Пусть L — поле частных кольца Wu, R — кольцо регулярных дифференциальных операторов на A. Тогда операция $f \to \bar{f}$ продолжается до отображения

$$\Theta : \mathscr{E}(G) \bigotimes_K L \to R \bigotimes_{Wu} L,$$

Θ коммутирует с действием R_g и L_h.

Теорема 3. *Θ является изоморфизмом L-модулей $\mathscr{E}(G) \underset{K}{\otimes}{}_K L$ и $R \underset{Wu}{\otimes} L$.*

Доказательство. Как следует из ([1]), размерность над L пространства векторов, меняющихся по данному неприводимому представлению группы G при представлениях R^G и R^A в обоих пространствах совпадает. По теореме 2 Θ — эпиморфизм, значит, Θ — изоморфизм.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, А. А. Кириллов, Функциональн. анализ и его приложения, 3, в. 1 (1969). [2] Harish-Chandra, Trans. Am. Math. Soc., 70, 28 (1951).