Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 2

УДК 513.88:513.83 *МАТЕМАТИКА*

А. Л. КАЛАШНИКОВ, С. Н. СЛУГИН

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО С. Л. СОБОЛЕВА КАК ВАРИАЦИОННАЯ СТРУКТУРА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 III 1970)

Теория нормированных полуупорядоченных линеалов ([2-4]) не охватывает некоторые пространства дифференцируемых функций, так как требование существования точной границы иногда оказывается невыполнимым или не согласуется с нормой. В настоящей работе вводится понятие такого частично упорядоченного гильбертова пространства, в котором каждое конечное множество имеет среди своих верхних границ наименьшую в вариационном смысле, согласованном с нормой. Это пространство названо вариационной структурой. Оно является обобщением понятия KH-пространства ([5]).

В одном классе гильбертовых векторных структур указан способ введения другого порядка (в более сильном смысле), допускающего наличие вариационных граней.

Доказано, что все построения применимы к пространству С. Л. Соболева $W = W_2{}'$ ([1]). Порядок обладает рядом естественных свойств: введенная сравнимость функций влечет их поточечную сравнимость и согласована со сходимостью по норме (теорема); в W имеются вариационные грани конечных семейств функций; если семейство имеет наименьшую верхнюю границу, то вариационная верхняя грань совпадает с ней; для нижних границ выполняется соотношение дуальности.

1. Пусть в гильбертовом пространстве X выделен замкнутый конус $K \neq \{0\}$, содержащий нуль и обладающий свойствами 1), 2). Элементы $x \in K$ называются положительными, $x \geqslant 0$. По определению, $x > 0$, если $x \in K$, $x \neq 0$; $x > y$, $y < x$, если $x - y > 0$. Требуется: 1) если элементы x, $y > 0$, число $\lambda > 0$, то $x \neq 0$, $x + y > 0$, $\lambda x > 0$, $(x, y) \geqslant 0$; 2) для любого элемента $x \in X$ существует элемент $y \geqslant x$, 0. Тогда неравенства $0 < x < y$ влекут $\|x\| \leqslant \|y\|$; каждый элемент $x \in X$ разлагается в разность элементов конуса K. В частично упорядоченном линеале X имеют место обычные связи между соотношениями сравнимости и векторными операциями.

Для конечного множества F, состоящего из n элементов x_i (число n произвольное), обозначим через V множество его верхних границ $v \geqslant x_i$. Обозначение $V \geqslant F$. Множество V замкнуто в силу замкнутости конуса K. Оно непусто: по условию 2) существуют элементы $z_i \geqslant x_i$, 0, следовательно, элемент

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \in V.$$

Определим функционалы

$$G(v) = (v, v), \quad H(v) = \sum_{i=1}^{n} G(v - x_i)$$

на элементах $v \in V$. Функционалы, очевидно, непрерывные, неотрицательные и неубывающие на V вследствие монотонности нормы для положительных элементов.

Теорема 1. *Для любого конечного множества $F \subset X$ существует единственная верхняя граница v_0 такая, что при всех $v \in V \geqslant F$*

$$\inf H(v) = H(v_0).$$

При доказательстве строится минимизирующая последовательность и используется тождество

$$H_2(v + w) + nG(v - w) = 2H(v) + 2H(w),$$

где элементы v, $w \in V$, а функционал $H_2(u) = \sum_{i=1}^{n} G(u - 2x_i)$ определен на алгебраической сумме $V + V$.

Определение. Элемент v_0, доставляющий минимум функционалу H на множестве V верхних границ конечного множества F, назовем вариационной верхней гранью множества F. Пространство X назовем вариационной структурой. Сохраним здесь обозначения: $v_0 = \sup x_i$, в частности, $v_0 = x \vee y$. Вариационная нижняя грань $\inf x_i = -\sup(-x_i)$. В частности, $x \wedge y$.

Если F имеет наименьшую верхнюю границу (в обычном смысле), то элемент v_0 необходимо совпадает с ней в силу неубывания функционала H на множестве V и единственности вариационной грани. Поэтому вариационная структура является (в классе гильбертовых пространств) промежуточным объектом между частично упорядоченными и полуупорядоченными линеалами.

Отметим некоторые свойства граней. Растяжение, сжатие: $\sup \lambda x_i = \lambda v_0$ при $\lambda > 0$; $\sup \lambda x_i = \lambda \inf x_i$ при $\lambda < 0$. Сдвиг: $\sup(x_i + x) = v_0 + x$ при всех $x \in X$. Далее, $x \vee y + x \wedge y = x + y$.

Вводятся обычные обозначения:

$$x_+ = x \vee 0,\ x_- = (-x) \vee 0,\ |x| = x_+ + x_-,\ x_n \vee 0 = x_n^+.$$

Устанавливается, что

$$x_+ \leqslant |x|, \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|, \quad x = x_+ - x_-, \quad x_+ \wedge x_- = 0.$$

Представление элемента x в виде $y - z$, где $y \wedge z = 0$, единственно. Далее, $|x| = x \vee -x = x_+ \vee x_-$, $||x|| = |x|$.

2. Пусть теперь X является H-пространством и K-линеалом с конусом M положительных элементов. Потребуем:

a) дизъюнктность элементов влечет их ортогональность;

b) множество $N \neq \{0\}$, где $N = \{y\colon (x, y) \geqslant 0 \quad \forall x \in M\}$;

c) конус M замкнут.

Для выполнения условия c) достаточно, чтобы удовлетворялось

d) множество $\{x\colon (x, y) \geqslant 0\ \forall y \in N\} = M$.

Из условия a) следуют соотношения

$$\|x_+\|,\ \|x_-\| \leqslant \||x|\| = \|x\|. \tag{1}$$

Заметим также, что $N \subset M$. Действительно, если $y \in N$, то $y_- \in M$, $(y, y_-) \geqslant 0$, $(y_+, y_-) \geqslant (y_-, y_-)$. Но $y_+ \perp y_-$ по условию a). Следовательно, $y_- = 0$, $y \in M$.

Введем в X иной порядок, обращающий X в вариационную структуру. Выделим в $N \neq \{0\}$ некоторое подмножество P, любая пара p, q элементов которого (в том числе и $p = q$) дает скалярное произведение $(p, q) \geqslant 1$ $(p, q \in P \subset N)$. Очевидно, элементы $\lambda p \in P$ при $\lambda \geqslant 1$.

Образуем множества

$$Q = \{y + \mu p\colon\ y \in M,\ p \in P,\ \mu \geqslant \|y\|\},$$

$$R = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\colon\ x_i \in Q\right\},$$

где числа n всевозможные. Ясно, что $\lambda Q \subset Q$, $\lambda R \subset R$ при $\lambda \geqslant 0$; $R + R = R$. Полагая $y = 0$, $\mu = 1$, находим $P \subset Q \subset R$. Кроме того, $R \subset M$,

$$(v, w) \geqslant 0 \quad (v, w \in R). \tag{2}$$

Конусом K назовем замыкание множества R, $\overline{R} = K$.

Теорема 2. *X является вариационной структурой с конусом K. При этом $K \subset M$, т. е. сравнимость приобретает более сильный смысл.*

Неравенство $(x, y) \geqslant 0$ для $x, y \in K$ получается из неравенств вида (2) после перехода к пределу. Включение $K \subset M$ следует из соотношений $R \subset M = \overline{M}$. Поскольку в K-линеале X с конусом M любой элемент x представим в виде разности элементов конуса M, то доказательство существования элемента $y \in K$ такого, что $y - x \in K$, сводится к случаю $x \in M$. Но таков, например, элемент $y = x + \mu p$, где число $\mu \geqslant \|x\|, 1$.

Теорема 3. *Порядок согласован со сходимостью: если $|x_n| \leqslant |y_n|$, $y_n \to 0$, то $x_n \to 0$.*

Достаточно установить, что сходимость $x_n \to 0$ влечет $x_n^+ \to 0$ (здесь модули и положительные части элементов берутся в вариационном смысле, см. п. 1). Возьмем фиксированный элемент $p \in P$, построим грани $y_n = x_n \vee 0$, $z_n = (-x_n) \vee 0$ (сейчас в смысле K-линеала X с конусом M) и элементы $v_n = y_n + \|x_n\| p$. В силу соотношений (1) имеем $\|y_n\| \leqslant \|x_n\|$. Поэтому $v_n \to 0$. Так как $v_n \geqslant 0$, $v_n - x_n = z_n + \|x_n\| p \geqslant 0$ по конусу K, то согласно определению вариационной грани x_n^+ получаем $H(x_n^+) \leqslant H(v_n)$, $G(x_n^+) \leqslant G(x_n^+ - x_n) + G(x_n^+) \leqslant G(v_n - x_n) + G(v_n) \to 0$, следовательно, $x_n^+ \to 0$.

3. Перейдем к пространству $W = W_2'$.

Теорема 4. *Если в качестве M принять семейство всех неотрицательных функций из W, то W удовлетворяет всем требованиям пункта 2 (включая условия а) — d)) и, следовательно, является вариационной структурой с конусом K. Сравнимость по конусу K влечет поточечную сравнимость и согласована со сходимостью по норме.*

Итак, вначале сравнимости придан поточечный смысл (по конусу M) и затем — более сильный (по конусу K). Состав нового конуса K зависит от выбора семейства P, которое может быть взято в зависимости от условий конкретной задачи, решаемой в пространстве W.

При доказательстве теоремы 4 вначале устанавливается, что поточечно определенная грань $x \vee 0$ для $x \in W$ тоже содержится в W и, следовательно, W является K-линеалом с конусом M. Поточечная дизъюнктност функций x, y влечет поточечную дизъюнктность их обобщенных производных и, следовательно, ортогональность элементов x, y в H-пространстве W. Область определения функций обозначена D, ее граница S. Множество N нетривиально, содержит, в частности, все функции с неположительным лапласианом, удовлетворяющие краевому условию $x|_S = 0$.

Для доказательства выполнения условия d) п. 2 допустим существование элемента $x \notin M$ такого, что $(x, y) \geqslant 0$ при всех $y \in N$. Тогда функция $x < 0$ на некотором подмножестве $E \subset D$ положительной меры. Найдем в W_2^2 решение задачи $y|_S = 0$ для уравнения $\Delta y = -\chi$, где χ — характеристическая функция множества E. Тогда по формуле Грина

$$(x, y) = -\int_D x \Delta y \, dD = \int_E x \, dD < 0,$$

что противоречит неравенству $(x, y) \geqslant 0$. Такова схема доказательства теоремы 4.

Заметим, что если под неравенством $x > 0$ понимать $x \neq 0$ и неотрицательность всех первых производных функций x, то эта сравнимость будет согласована с нормой в W, но для некоторых краевых задач теряет смысл:

так, например, в классе функций, удовлетворяющих краевому условию $x|_S = 0$, нет элементов $x > 0$ в последнем смысле.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
24 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. [2] Н. Бурбаки, Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, «Наука», 1965. [3] Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы, М., 1965. [4] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [5] С. Н. Слугин, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, в. 1, 215 (1965).