

Р. Д. КУЛОВ

О ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 II 1970)

Теоремы вложения для пространств $W_{(p)}^l$ (l — целое), $H_{(p)}^r$, $S_{(p)}^r$, H , $L_{(p)}^{r, (q)}$ со смешанной нормой рассмотрены в ряде работ (6-16). В данной заметке даются теоремы вложения пространств $B_{(p)}^1(E^n)$ со смешанной нормой. Рассматриваются также весовые пространства $B_{(p), \alpha}^1(\dot{E}^n)$. Пусть E^n — n -мерное вещественное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$; $\dot{E}^n = \{x: x_n > 0\}$; $E^n = E^{n_1} \times \dots \times E^{n_k} = E^{m_1} \times \dots \times E^{m_\tau}$; $\dot{E}^n = E^{n_1} \times \dots \times E^{n_k} = E^{m_1} \times \dots \times E^{m_\tau}$, причем разбиения на E^{n_i} и E^{m_j} (E^{n_i} и E^{m_j}) ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \tau$) друг от друга не зависят; векторы подпространств E^{n_i} и E^{m_j} будем обозначать соответственно $x_{n_i} = (x_{i1}, \dots, x_{in_i})$ и $x_{m_j} = (x_{1j}^{(j)}, \dots, x_{m_j}^{(j)})$ ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \tau$); $p = (p_1, \dots, p_k)$, $q = (q_1, \dots, q_\tau)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$; $v_i, \bar{l}_i, \bar{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$) — неотрицательные целые числа, $\alpha \geq 0$.

$\square_{h_{n_i}} x_{n_i}$ — n_i -мерный параллелепипед в E^{n_i} с вершиной в точке x_{n_i} и ребрами $h_{i1}, \dots, h_{in_i}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, k$).

Пусть $f(y)$ — гладкая финитная функция в E^n и

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{(p), \alpha}^1(\dot{E}^n)} = \left(\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+p_k \alpha_i}} \|y_n^{a/p_1} \Delta_i^2(t) D_i^{\bar{l}_i} f(y)\|_{L_{(p)}^1(\dot{E}^n)}^{p_k} \right)^{1/p_k} < \infty \quad (1)$$

(где $L_{(p)}^1(\dot{E}^n)$ — пространство со смешанной нормой (см. (8)));

$$\|f\|_{B_{(p), \alpha}^1(\dot{E}^n)} = \|f\|_{L_{(p)}^1(\dot{E}^n)} + \sum_{i=1}^n \|f\|_{\mathcal{L}_{(p), \alpha}^1(\dot{E}^n)} \quad (2)$$

Положив в (2) $\alpha = 0$ и заменив $\dot{E}^n$ на E^n , получим

$$\|f\|_{B_{(p)}^1(E^n)} = \|f\|_{L_{(p)}^1(E^n)} + \sum_{i=1}^n \|f\|_{\mathcal{L}_{(p)}^1(E^n)} \quad (3)$$

Пространствами $B_{(p)}^1(E^n)$ и $B_{(p), \alpha}^1(\dot{E}^n)$ назовем замыкания множества гладких финитных функций в нормах (2) и (3).

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Если $1 < p_i \leq q_i < \infty$ ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \tau$); $\bar{l}_i = l_i + \alpha_i$, $0 < \alpha_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$);

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} (1 + v_i) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{l_{ij}} + \sum_{i=1}^\tau \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{l_{ij}^{(i)}} > 0,$$

$f \in B_{(p)}^1(E^n)$, то $D_1^{v_1} \dots D_n^{v_n} f \in L_{(q)}^1(E^n)$ и выполняется неравенство

$$\|D_1^{v_1} \dots D_n^{v_n} f\|_{L_{(q)}^1(E^n)} \leq C \|f\|_{B_{(p)}^1(E^n)} \quad (4)$$

Теорема 2. Если $1 < p_i \leq q_j < \infty$ ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \tau$); $l_i = \bar{l}_i + \alpha_i$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $r_i = \bar{r}_i + \beta_i$, $0 < \beta_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$);

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{l_{ij}} + \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{l_j^{(i)}} > \frac{r_s}{l_s} \quad (s = 1, \dots, n),$$

$f \in B_{(p)}^1(E^n)$, то $f \in B_{(q)}^r(E^n)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{B_{(q)}^r(E^n)} \leq C \|f\|_{B_{(p)}^1(E^n)}. \quad (5)$$

Теорема 3. Если $1 < p_i \leq q_j < \infty$, $0 \leq \alpha < p_i / \max_i p_i'$ ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \tau$); $l_i = \bar{l}_i + \alpha_i$, $0 < \alpha_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$);

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} (1 + v_i) - \frac{\alpha}{p_1 l_n} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{\tilde{n}_i} \frac{1}{l_{ij}} + \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{\tilde{m}_i} \frac{1}{l_j^{(i)}} > 0,$$

$f \in B_{(p), \alpha}^1(\tilde{E}^n)$, то $D_1^{v_1} \dots D_n^{v_n} f \in L_{(q)}(\tilde{E}^n)$ и выполняется неравенство

$$\|D_1^{v_1} \dots D_n^{v_n} f\|_{L_{(q)}(\tilde{E}^n)} \leq C \|f\|_{B_{(p), \alpha}^1(\tilde{E}^n)}. \quad (6)$$

Теорема 4. Если $1 < p_i \leq q_j < \infty$, $0 \leq \alpha < p_i / \max_i p_i'$ ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, \tau$); $l_i = \bar{l}_i + \alpha_i$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $r_i = \bar{r}_i + \beta_i$, $0 < \beta_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$);

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} - \frac{\alpha}{p_1 l_n} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{\tilde{n}_i} \frac{1}{l_{ij}} + \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{\tilde{m}_i} \frac{1}{l_j^{(i)}} > \frac{r_s}{l_s} \quad (s = 1, \dots, n);$$

$f \in B_{(p), \alpha}^1(\tilde{E}^n)$, то $f \in B_{(q)}^r(\tilde{E}^n)$ и выполняется неравенство

$$\|f\|_{B_{(q)}^r(\tilde{E}^n)} \leq C \|f\|_{B_{(p), \alpha}^1(\tilde{E}^n)}. \quad (7)$$

В неравенствах (4)–(7) константа C не зависит от f .

Наметим схему доказательства, например, теоремы 2. Рассмотрим норму $\|f\|_{B_{(q)}^r(E^n)}$; ее оценка, имея в виду теорему 1, сводится к оценке выражения

$$N = \left(\int_0^{h^{\kappa_s}} \frac{dz}{z^{1+q_s \beta_s}} \|\Delta_s^2(z) D_s^{\bar{r}_s} f(\mathbf{x})\|_{L_{(q)}(E^n)}^{q_s \tau} \right)^{1/q_s \tau}, \quad \text{где } \kappa_s = \frac{1}{l_s} \quad (s = 1, \dots, n).$$

Пользуясь интегральным тождеством В. П. Ильина⁽²⁾, делая необходимые преобразования и оценки, получим

$$\begin{aligned} N &\leq C \left[\int_0^{h^{\kappa_s}} \frac{dz}{z^{1+(\beta_s-2)/q_s}} h^{(-\beta_s - \bar{r}_s \kappa_s - 2\kappa_s)} \|f\|_{L_{(p)}(E^n)}^{q_s \tau} \right]^{1/q_s \tau} + C \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{h^{\kappa_s}} \frac{dz}{z^{1+\beta_s/q_s}} \times \right. \\ &\times \left\| \int_0^{1/\kappa_s} \frac{dv}{v^{1+\lambda_i - \varepsilon + \gamma_i \kappa_i + \bar{r}_s \kappa_s}} \int_0^{v \kappa_i} t^{\gamma_i - \left(\frac{1}{p_k} + \alpha_i\right)} dt \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + v \mathbf{x}} \Delta_i^2\left(\frac{t}{2}\right) D_i^{\bar{r}_i} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\|_{L_{(q)}(E^n)}^{q_s \tau} \right]^{1/q_s \tau} + \\ &+ C \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{h^{\kappa_s}} \frac{dz}{z^{1+(\beta_s-2)/q_s}} \left\| \int_{1/\kappa_s}^h \frac{dv}{v^{1+\lambda_i - \varepsilon + \bar{r}_s \kappa_s + 2\kappa_s + \gamma_i \kappa_i}} \int_0^{v \kappa_i} t^{\gamma_i - (1/p_k + \alpha_i)} dt \times \right. \right. \\ &\times \left. \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x} + v \mathbf{x}} \Delta_i^2\left(\frac{t}{2}\right) D_i^{\bar{r}_i} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\|_{L_{(q)}(E^n)}^{q_s \tau} \right]^{1/q_s \tau} = N_1 + N_2 + N_3, \end{aligned}$$

где

$$\delta = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^s \frac{1}{p_k} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} - \sum_{i=1}^s \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^{(i)},$$

$$0 < \gamma_i \leq \frac{1}{p_k} + \alpha_i, \quad \lambda_i = \frac{\alpha_i}{p_k} + \sum_{j=1}^n \alpha_j - \delta, \quad \varepsilon = 1 - \delta.$$

Оценим одно из выражений, например N_2 (N_1, N_3 оцениваются аналогично). Для этого выберем γ_i так, чтобы $\varepsilon - \bar{r}_s \alpha_s > \gamma_i \alpha_i$ ($i = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, s$), тогда после несложных оценок будем иметь

$$N_2 \leq ch^{\varepsilon - r_s \alpha_s} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{h \alpha_s} \frac{dz}{1 + \frac{q_\tau}{\alpha_s} (\gamma_i \alpha_i - \mu)} \right] \left(\int_0^{z^{1/\alpha_s}} \frac{dv}{1 + p_k \sum_{i=1}^s \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^{(i)} + \mu p_k} \right) \times$$

$$\times \int_0^{\alpha_i} t^{\gamma_i p_k - (1 + p_k \alpha_i)} dt \left\| \Delta_i^2 \left(\frac{t}{2} \right) D_i^T f(y) \right\|_{L(p) [\square_{\alpha_{n_1}}(x_{n_1}), \dots, \square_{\alpha_{n_k}}(x_{n_k})]}^{p_k} \left\|_{L(q)(E^n)}^{1/p_k q_\tau} \right\|^{1/q_\tau} \leq$$

(где μ — произвольное положительное число); воспользовавшись обобщенным неравенством Минковского и леммой (1) А. Х. Гудиева⁽⁵⁾ нужное число раз, будем иметь

$$\leq ch^{\varepsilon - r_s \alpha_s} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{h \alpha_s} \frac{dz}{1 + \frac{q_\tau}{\alpha_s} (\gamma_i \alpha_i - \mu)} \right] \left(\int_0^{z^{1/\alpha_s}} \frac{dv}{1 + \mu p_k} \int_0^{\alpha_i} t^{\gamma_i p_k - (1 + p_k \alpha_i)} dt \right) \times$$

$$\times \left\| \Delta_i^2 \left(\frac{t}{2} \right) D_i^T f(y) \right\|_{L(p)(E^n)}^{p_k} \left\|_{L(q)(E^n)}^{q_\tau} \right\|^{1/q_\tau} \leq$$

поменяв порядок интегрирования; выбрав μ так, чтобы $\gamma_i \alpha_i - \mu > 0$, получим

$$\leq ch^{\varepsilon - r_s \alpha_s} \sum_{i=1}^n \|f\|_{\mathcal{L}_{(p)}^{l_i}(E^n)}.$$

Из полученных оценок при $h = 1$ получаем неравенство (5).

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. С. Л. Соболеву за внимание к этой работе, а также А. Х. Гудиеву за постановку вопроса и ценные советы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Матем. сборн., 4 (46), 3, 471 (1938). ² С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.
³ В. П. Ильин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 66, 205 (1962).
⁴ О. В. Бесов, Там же, 60, 41 (1961). ⁵ А. Х. Гудиев, Дифф. уравн., 2, 6, 172 (1966). ⁶ С. М. Никольский, Сибирск. матем. журн., 3, 6, 845 (1962). ⁷ А. Х. Гудиев, ДАН, 160, № 2, 267 (1965). ⁸ А. Х. Гудиев, ДАН, 149, № 3, 509 (1963).
⁹ А. Д. Беринов, Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1968. ¹⁰ А. П. Унинский, Сибирск. матем. журн., 10, 1, 158 (1969). ¹¹ А. С. Джафаров, Уч. зап. Азерб. гос. ун-в. им. С. М. Кирова, № 2 (1963). ¹² А. Х. Гудиев, Изв. АН УзССР, № 4, 3 (1968). ¹³ Я. С. Бугров, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 77, 45 (1965). ¹⁴ Т. И. Аманов, Докторская диссертация, Новосибирск, 1967.
¹⁵ О. В. Бесов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 105, 21 (1969).
¹⁶ А. Д. Джабраилов, ДАН, 159, № 2, 254 (1964).