Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 517.949.2

МАТЕМАТИКА

В. Ш. БУРД, Ю. С. КОЛЕСОВ

О ДИХОТОМИИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 28 V 1970)

В работах [1-3] построена функция Грина задачи о почти периодических решениях для обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопрос о построении функции Грина тесно связан с так называемой экспоненциальной дихотомией решений однородного уравнения. Выяснение условий, при которых имеет место экспоненциальная дихотомия решений для различных конкретных классов уравнений с распределенными параметрами, представляется весьма сложной задачей. Основную трудность здесь составляет предварительное расщепление пространства начальных условий в прямую сумму двух подпространств, соответствующих ограниченным и неограниченным при $t \to \infty$ решениям однородного уравнения. В ряде работ [1, 4], посвященных задаче о дихотомии на полуоси и всей оси для уравнений в банаховом пространстве с ограниченными и неограниченными операторами, такое расщепление предполагалось априори выполненным.

Авторы нашли прием, позволяющий устанавливать дихотомию решений для некоторых классов уравнений с распределенными параметрами. Используя его, строится функция Грина задачи о почти периодических решениях для функционально-дифференциальных уравнений. При этом существенно используется переход к эквивалентным в определенном смысле уравнениям в банаховых пространствах [5].

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [6-8], полученные результаты позволяют решить ряд вопросов локальной и нелокальной теории почти периодических колебаний для функционально-дифференциальных уравнений.

1. Через C обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на всей оси функций со значениями в n-мерном пространстве R^n, а через B — его подпространство, состоящее из почти периодических функций. Через B_1 будем обозначать совокупность почти периодических функций, обладающих почти периодической производной.

При каждом $t \in (-\infty, \infty)$ рассмотрим линейный оператор

$$l(t, x(s)) = \int_{-h}^{0} [d_s r(t, s)]\, x(s),$$

действующий из пространства $C(-h, 0)$ непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ функций в R^n. Здесь $r(t, s)$ — квадратная матрица порядка n, элементы которой при каждом t являются функциями ограниченной вариации, $r(t, -h) \equiv 0$.

Ниже будем считать, что выполнены условия:

1. Матрица $r(t, 0)$ почти периодична;

2. $\sup | \overset{0}{\underset{-h}{V}} r(t, s) | < \infty$, $-\infty < t < \infty$, где $|\ |$ — некоторая норма матрицы в R^n;

3. Элементы матрицы $r(t, s)$ почти периодичны по t как абстрактные функции со значениями в пространстве суммируемых функций $L(-h, 0)$.

Рассмотрим теперь в пространстве C линейный оператор

$$Lx(t) = x'(t) + l(t, x(t+s)), \tag{1}$$

который определим на таких функциях $x(t) \in C$, что $Lx(t) \in B$.

Смысл условий 1—3 выясняется в следующих леммах, при доказательстве которых используются некоторые конструкции из ([9]).

Лемма 1. *Пусть $x(s)$ — произвольная функция из $C(-h, 0)$. Тогда $l(t, x(s)) \in B$ в том и только в том случае, если выполнены условия* 1—3.

Лемма 2. *Оператор $\Pi x(t) = l(t, x(t+s))$ действует и непрерывен в B тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1—3.

Лемма 3. *Область определения операторов L содержит B_1 в том и только том случае, если выполнены условия* 1—3.

Оператор L будем называть регулярным, если уравнение

$$Lx = f(t) \tag{2}$$

при каждой функции $f(t) \in B$ имеет, по крайней мере, одно решение $x(t) \in C$.

Теорема 1. *Если оператор L регулярен, то уравнение* (2) *при $f(t) \in C$ $(f(t) \in B)$ имеет единственное решение $x(t) \in C$ $(x(t) \in B)$.*

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что область определения оператора L совпадает с B_1.

2. Пусть $x(t)$ — решение однородного уравнения

$$Lx = 0 \tag{3}$$

с начальной функцией $x(s) \in C(-h, 0)$, которая задается в момент времени τ. Определим в $C(-h, 0)$ семейство операторов

$$U(t, \tau)x(s) = x(t+s). \tag{4}$$

Будем говорить, что для уравнения (3) имеет место экспоненциальная дихотомия решений, если выполнены следующие условия.

Во-первых, в пространстве $C(-h, 0)$ существуют почти периодически зависящие от t в равномерной операторной топологии проекторы $P_+(t)$ и $P_-(t)$ такие, что

$$P_+(t)P_-(t) = 0, \quad P_+(t) + P_-(t) = I; \tag{5}$$

$$P_+(t)U(t, \tau) = U(t, \tau)P_+(\tau), \quad P_-(t)U(t, \tau) = U(t, \tau)P_-(\tau), \tag{6}$$

причем $P_-(t)$ — проектор на конечномерное подпространство.

Во-вторых, существуют такие положительные постоянные M_1 и γ_1, что

$$\|U(t, \tau)P_+(\tau)x(s)\| \leqslant M_1 \exp[-\gamma_1(t-\tau)]\|P_+(\tau)x(s)\| \qquad (t \geqslant \tau). \tag{7}$$

В-третьих, решения уравнения (3) с начальными условиями $P_-(\tau)x(s)$ определены как при $t \geqslant \tau$, так и при $t \leqslant \tau$ и справедливы неравенства

$$\|U(t, \tau)P_-(\tau)x(s)\| \geqslant M_2 \exp[+\gamma_2(t-\tau)]\|P_-(\tau)x(s)\| \qquad (t \geqslant \tau), \tag{8}$$

$$\|U(t, \tau)P_-(\tau)x(s)\| \leqslant M_3 \exp\gamma_3(t-\tau)\|P_-(\tau)x(s)\| \qquad (t \leqslant \tau). \tag{9}$$

где $M_2, M_3, \gamma_2, \gamma_3$ — некоторые положительные постоянные.

В неравенствах (7) — (9) $\| \ \|$ — норма в $C(-h, 0)$.

Теорема 2. *Если оператор* (1) *регулярен, то имеет место экспоненциальная дихотомия решений уравнения* (3).

3. Обозначим через $C_{\text{кн}}(-h, 0)$ пространство ограниченных кусочно-непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в R^n. Будем считать, что в этом пространстве $\|x\| = \sup|x(s)|$, $(-h \leqslant s \leqslant 0)$, где $| \ |$ — норма в R^n.

Ясно, что оператор (4) определен на функциях $x(s) \in C_{\text{кн}}(-h, 0)$. Проекторы $P_+(t)$ и $P_-(t)$ определим на функциях $x(s) \in C_{\text{кн}}(-h, 0)$ так:

$$P_-(t)x(s) = U(t, h+t)P_-(h+t)U(h+t, t)x(s),$$

$$P_+(t)x(s) = x(s) - P_-(t)x(s).$$

Очевидно, формулы (5) — (6) и неравенства (7) — (9) остаются при этом справедливыми.

Обозначим через $e_i(s)$ $(i = 1, \ldots, n)$ элементы пространства $C_{nn}(-h, 0)$, у которых i-я компонента равна нулю при $-h \leqslant s < 0$ и равна единице при $s = 0$, а остальные компоненты тождественно равны нулю. Далее, рассмотрим в $C_{nn}(-h, 0)$ семейство операторов

$$G(t, \tau) = \begin{cases} U(t, \tau) P_+(\tau) & \text{при} \quad t \geqslant \tau, \\ -U(t, \tau) P_-(\tau) & \text{при} \quad t < \tau, \end{cases}$$

и обозначим через $g(t, \tau)$ матрицу-функцию, у которой i-й вектор-столбец определяется формулой $l_0(G(t, \tau) e_i(s))$, где $l_0(x(s)) = x(0)$ — оператор из $C_{nn}(-h, 0)$ в R^n.

Согласно теореме 1 оператор L непрерывно обратим в B.

Теорема 3. *Справедлива формула*

$$L^{-1} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

4. Рассмотрим теперь семейство операторов

$$L(\mu) x(t) = x'(t) + l(t, x(t+s); \mu),$$

где

$$l(t, x(s); \mu) = \int_{-h}^{0} [d_s r(t, s, \mu)] x(s),$$

а параметр μ принадлежит некоторому метрическому компакту M. Будем считать, что при каждом $\mu \in M$ $r(t, s; \mu)$ удовлетворяет условиям 1—3.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1. *При каждом* $T > 0$

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \sup_{|t-\tau| \leqslant T} \left| \int_{\tau}^{t} [r(\sigma, 0; \mu) - r(\sigma, 0; \mu_0)] d\sigma \right| = 0,$$

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \sup_{|t-\tau| \leqslant T} \int_{-h}^{0} \left| \int_{\tau}^{t} [r(\sigma, s; \mu) - r(\sigma, s; \mu_0)] d\sigma \right| ds = 0;$$

2. $\sup [| \overset{0}{\underset{-h}{V}} r(t, s; \mu) |, \ | r(t, 0; \mu) |] < \infty$, $t \in (-\infty, \infty)$, $\mu \in M$. *Пусть оператор* $L(\mu_0)$ *регулярен.*

Тогда операторы $L(\mu)$ *регулярны для всех значений* μ, *достаточно близких к* μ_0; *проекторы* $P_+(t; \mu)$ *и* $P_-(t; \mu)$ *равномерно относительно* t *стремятся соответственно к проекторам* $P_+(t; \mu_0)$ *и* $P_-(t; \mu_0)$; *для некоторого* $\gamma_0 > 0$ *выполнено равенство*

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \sup_{-\infty < t, \tau < \infty} | g(t, \tau; \mu) - g(t, \tau; \mu_0) | \exp[-\gamma_0 |t - \tau|] = 0.$$

При проверке условия 1 может быть полезна

Лемма 4. *Условие 1 выполнено в том и только том случае, если для каждого* $T > 0$ *и для любой функции* $x(s) \in C(-h, 0)$

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \sup_{|t-\tau| \leqslant T} \left| \int_{\tau}^{t} [l(\sigma, x(s); \mu) - l(\sigma, x(s); \mu_0)] d\sigma \right| = 0.$$

5. В заключение рассмотрим оператор высшего порядка

$$Lx(t) = x^{(m)}(t) + l_1(t, x^{(m-1)}(t+s)) + \ldots + l_m(t, x(t+s)), \qquad (10)$$

который определим на таких m раз непрерывно дифференцируемых функциях $x(t) \in C$, что $Lx(t) \in B$. Предполагается, что $l_i(t, x(s))$ $(i = 1, \ldots$

$\ldots, m)$ удовлетворяют указанным в п.1 ограничениям. Регулярность оператора (10) определяется как и регулярность оператора (1). Наряду с оператором (10) рассмотрим соответствующий ему оператор первого порядка

$$\bar{L}u(t) = u'(t) + \bar{l}(t, u(t+s)), \tag{11}$$

где $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, $(u_i(t) \in C, \quad i = 1, \ldots, m)$,
$\bar{l}(t, u(s)) = \mathrm{colon}\,(-u_2(0), \ldots, -u_m(0), l_m(t, u_1(s)) + \ldots + l_1(t, u_m(s))$.

Теорема 5. *Оператор* (10) *регулярен в том и только том случае, если регулярен оператор* (11).

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
18 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Massera, J. J. Schäffer, Linear Differential Equation and Function Spaces, N.Y., 1966. [2] W. A. Coppel, J. Different. Equat., 3, № 3 (1967). [3] В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, М. А. Красносельский, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5 (1969). [4] Ю. И. Домшлак, Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ-матем. и техн. наук, № 5 (1961). [5] Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. [6] W. A. Coppel, J. Different. Equat., 4, № 3 (1968). [7] W. A. Chang, J. Different. Equat., 4, № 2 (1968). [8] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970. [9] А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М., 1951.