

Б. СТЕРНИН

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 18 VIII 1969)

1. Введение. В предлагаемой статье изучается разрешимость некоторого класса нестационарных дифференциальных уравнений в бесконечном по времени цилиндре. Типичными примерами таких уравнений являются классические уравнения Лапласа, прямой и обратной теплопроводности, и с этой точки зрения рассмотрение задач в бесконечном временном интервале естественно.

К таким задачам (физики называют их задачами без начальных условий) приводит, например, естественная проблема о распространении температуры в почве (см. ⁽¹⁾). При этом однозначное решение выделяется принадлежностью его к некоторому классу, обеспечивающему определенное поведение при достаточно больших (по модулю) значениях времени (например, ограниченность решения при $t \rightarrow \pm \infty$).

Мы также исходим из этой концепции и доказываем однозначную разрешимость (для уравнений с не зависящими от времени коэффициентами) и нормальную разрешимость (в общем случае) в пространствах С. Л. Соболева с экспоненциальным (предписанного типа) поведением на бесконечности. Отметим, что в «вольтерровском» случае (например, для параболических уравнений) можно доказать однозначную разрешимость и для уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, при этом, разумеется, как и для нормальной разрешимости, необходимо накладывать некоторые требования на поведение коэффициентов при $t \rightarrow \pm \infty$.

В этой статье мы занимаемся изучением задач типа С. Л. Соболева (см. ^(2, 3)). В то же время схема доказательства разрешимости носит по существу «банаховский» характер. Отметим в связи с этим, что близкие вопросы для случая цилиндра с краем были получены в работах ^(4, 5).

2. Функциональные пространства. Пусть X — n -мерное гладкое компактное многообразие без края и $\mathbb{R}^1$ — прямая. Введем в прямом произведении — цилиндре $C = X \times \mathbb{R}^1$ координаты (x, t) , $x \in X$, $t \in \mathbb{R}^1$. Тогда любая функция f на (некомпактном) многообразии C есть функция координат (x, t) : $f = f(x, t)$. Рассмотрим теперь комплексную прямую C . Выберем на ней вещественную прямую $\operatorname{Re} z = \alpha$, параллельную мнимой оси τ ($-\infty < \tau < +\infty$) и зафиксируем ее.

Определим теперь для тройки вещественных чисел (s, γ, α) пространство $H_{s, \gamma, \alpha}(C)$ как пространство распределений $f(x, t)$ на цилиндре $C = X \times \mathbb{R}^1$ с конечной нормой

$$\|f\|_{s, \gamma, \alpha} = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \|(1 + |z|^{2/\gamma} + \Delta)^{s/2} f(z, x)\| dz.$$

Здесь Δ — положительный оператор Лапласа на многообразии X , построенный с помощью некоторой римановой метрики, которая с этого момента считается фиксированной, $\|\cdot\|$ — L_2 -норма на многообразии X и

$$\hat{f}(z, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} f(t) dt \quad \operatorname{Re} z = \alpha.$$

Введем теперь пространство $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ для вещественной четверки чисел $(s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-)$. Пусть вначале $k = s/\gamma$ — натуральное число. Рассмотрим кусочно-постоянную функцию

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_+, & t > 0, \\ \alpha_-, & t < 0. \end{cases}$$

Тогда пространство $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-} = H_{s, \gamma, \alpha(t)}$ является замыканием гладких, убывающих при $t \rightarrow \pm\infty$ функций по норме

$$\|f\|_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\alpha(t)t} (\|f\|_s^2 + \|f^{(k)}\|_s^2) dt.$$

Для того чтобы определить пространство $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ для произвольной четверки $(s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-)$, мы рассмотрим гладкое разбиение единицы пространства $\mathbb{R}^1$

$$1 \equiv \sum_{i=1}^2 \varphi_i(t),$$

где

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < -1; \end{cases} \quad \varphi_2(t) = \begin{cases} 0, & t > 1, \\ 1, & t < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Это разложение единицы порождает разложение произвольной функции $f(x, t)$ на два слагаемых

$$f(x, t) \equiv \varphi_1 f + \varphi_2 f = F_1(x, t) + F_2(x, t),$$

причем, как нетрудно увидеть, если функция $f(x, t) \in H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ (s/γ — целое), то $F_1(x, t) \in H_{s, \gamma, \alpha_+}$, $F_2(x, t) \in H_{s, \gamma, \alpha_-}$. Поэтому написанные ниже выражения конечны, и мы можем определить пространство $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ как замыкание гладких убывающих при $t \rightarrow \pm\infty$ функций по норме

$$\|f\|_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-} = \|F\|_{s, \gamma, \alpha_+} + \|F\|_{s, \gamma, \alpha_-}.$$

Можно показать, что различные разбиения единицы на цилиндре S приводят к пространствам с эквивалентными нормами.

Ниже мы будем использовать пространства $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ в случае, когда одно из чисел α_+ , α_- обращается в бесконечность.

Пусть, например, α_+ — некоторое фиксированное конечное число, тогда пространства $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ с переменными α_- могут быть следующим образом профильтрованы:

$$\dots \supseteq H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha'_-} \supseteq H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha''_-} \supseteq \dots$$

где $\dots \supseteq \alpha'_- \supseteq \alpha''_- \supseteq \dots$

Пространство $H_{s, \gamma, \alpha_+, -\infty}$ определяется как пересечение

$$H_{s, \gamma, \alpha_+, -\infty} = \bigcap_{\alpha_-} H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$$

всех пространств $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ и снабжается топологией проективного предела, а пространство $H_{s, \gamma, \alpha_+, +\infty}$ является объединением

$$H_{s, \gamma, \alpha_+, +\infty} = \bigcup_{\alpha_-} H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$$

пространств $H_{s, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}$ и снабжается топологией индуктивного предела.

Аналогичным образом определяются пространства для $\alpha_+ = \pm\infty$.

3. Мы будем рассматривать квазиэллиптические дифференциальные выражения. Пусть D — дифференциальное выражение на цилиндре S . Выражение D в каждой локальной системе координат $(t, x^1, \dots, x^n)$ является многочленом от переменных $(\partial/\partial t, \partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, определенными в системе координат $(t, x^1, \dots, x^n)$. Допуская некоторую вольность, мы будем часто записывать выражение D в виде

$$D = D(x, t, \mathcal{D}_x, \partial/\partial t),$$

вкладывая в эту запись точный смысл, о котором говорилось выше.

Пусть теперь γ — некоторое положительное число. Определим старшую (главную) часть $D_0 = D_0(x, t, \mathcal{D}_x, \partial / \partial t)$ выражения как γ -однородную относительно переменных $\partial / \partial t$ и $\mathcal{D}_x$ часть выражения D . Это означает, что

$$D_0(x, t, \lambda^\gamma \partial / \partial t, \lambda \mathcal{D}_x) = \lambda^m D_0(x, t, \partial / \partial t, \mathcal{D}_x).$$

Сопоставим теперь дифференциальному выражению $D(x, t, \partial / \partial t, \mathcal{D}_x)$ характеристический многочлен $D_0(x, t, -z, -i\xi)$ с помощью формальной замены

$$\partial / \partial t \rightarrow -z, \quad \mathcal{D}_x \rightarrow -i\xi$$

в его старшей части D_0 .

Определение. Дифференциальное выражение $D(x, t, \partial / \partial t, \mathcal{D}_x)$ называется квазиэллиптическим, если в каждой точке (x, t) уравнение

$$D_0(x, t, -z, -i\xi) = 0$$

не имеет чисто мнимых корней $z = z(t, x, i\xi)$ при $\xi \neq 0$.

Замечание. Если в выражении $D(x, t, \mathcal{D}_x, \partial / \partial t)$ сделать формальную замену $\partial / \partial t \rightarrow -q^\nu$, то мы придем к семейству выражений

$$Dq = D(x, t, -q^\nu, \mathcal{D}_x),$$

и введенное выше условие эквивалентно квазиэллиптичности в смысле Аграновича — Вишика ⁽⁶⁾ семейства D_q на прямой $\operatorname{Re} z = 0$. Оно совпадает также с условием взвешенной эллиптичности в смысле Агмона — Ниренберга ⁽⁴⁾.

4. Задача С. Л. Соболева для квазиэллиптических уравнений. Пусть X — гладкое компактное многообразие без края и $X_p, p = 1, \dots, l$, — его подмногообразия коразмерностей $\nu_p \geq 1$. Мы будем рассматривать цилиндр $C = X \times \mathbb{R}^1$ и в нем цилиндрические подмногообразия $C_p = X_p \times \mathbb{R}^1$. Рассмотрим задачу С. Л. Соболева.

$$D(x, t, \mathcal{D}_x, \partial / \partial t) u(x, t) \equiv f(x, t) \pmod{\bigcup_p C_p}, \quad (2)$$

$$B_{pj}(x, t, \mathcal{D}_x, \partial / \partial t) u(x, t) = g_{pj}(x_p, t) \text{ на } C_p, \quad (3)$$

$$p = 1, \dots, l, j = c_{j_1, \dots, j_{\nu_p}}, |j| = j_1 + \dots + j_{\nu_p} \leq \kappa_p,$$

$$\kappa_p = \begin{cases} m - s - \nu_p/2, & \text{если } m - s - \nu_p/2 \text{ — не целое число,} \\ m - s - \nu_p/2 - 1, & \text{если } m - s - \nu_p/2 \text{ — целое число,} \end{cases}$$

причем $\deg D = m, \deg B_{pj} = b_{pj}$.

Естественным образом вводится понятие квазиэллиптичности задачи С. Л. Соболева.

Ассоциируем обычным образом с задачей (2), (3) оператор

$$(D, B) : H_{s, \gamma, \alpha}(C) \rightarrow H_{s-m, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}(C) / \text{mod } R \oplus \bigoplus_{p, j} H_{s-b_{pj}-\nu_p/2, \gamma, \alpha_+, \alpha_-}(C_p). \quad (4)$$

5. Основные теоремы.

Теорема 1 (конечности). Пусть коэффициенты дифференциальных выражений в квазиэллиптическом операторе (4) не зависят от переменной t . Тогда для любых чисел s и любых конечных чисел α_+ и α_- , за исключением некоторого дискретного множества, оператор (4) является почти изоморфизмом. Более того,

I. При $\alpha_- < \alpha_+$ оператор (4) мономорфен.

II. При $\alpha_- > \alpha_+$ оператор (4) эпиморфен.

III. При $\alpha_- = \alpha_+$ оператор (4) изоморфен.

При этом мы используем терминологию Н. Бурбаки, согласно которой почти изоморфизм называется гомоморфизмом, т. е. непрерывное и с замкнутой областью значений отображение, с конечномерным (над полем $\mathbb{C}$) ядром и коядром.

В случае, когда одно из чисел α_- или α_+ является бесконечным, справедлива следующая

Теорема 2 (о гомоморфности). В предположениях теоремы 1 для любых чисел s и любых α_+ и α_- за исключением некоторого дискретного мно-

жества на вещественной оси операторы

$$(D, B): H_{s, \gamma, a_+, -\infty}(C) \rightarrow H_{s-m, \gamma, a_+, -\infty}(C)/\text{mod } R \oplus H_{s-b_{pj}-\gamma/2, \gamma, a_+, -\infty}(C_p), \quad (5)$$

$$(D, B): H_{s, \gamma, +\infty, a_-}(C) \rightarrow H_{s-m, \gamma, +\infty, a_-}(C)/\text{mod } R \oplus H_{s-b_{pj}-\gamma/2, \gamma, +\infty, a_-}(C_p), \quad (6)$$

$$(D, B): H_{s, \gamma, a_+, +\infty}(C) \rightarrow H_{s-m, \gamma, a_+, +\infty}(C)/\text{mod } R \oplus H_{s-b_{pj}-\gamma/2, \gamma, a_+, +\infty}(C_p), \quad (7)$$

$$(D, B): H_{s, \gamma, -\infty, a_-}(C) \rightarrow H_{s-m, \gamma, -\infty, a_-}(C)/\text{mod } R \oplus H_{s-b_{pj}-\gamma/2, \gamma, -\infty, a_-}(C_p). \quad (8)$$

суть гомоморфизмы. Более того:

I. Операторы (5), (6) суть мономорфизмы с, вообще говоря, бесконечномерным ядром.

II. Операторы (7), (8) суть эпиморфизмы с, вообще говоря, бесконечномерным коядром.

Следующая теорема дает асимптотическое представление при $t \rightarrow \pm\infty$ решения задачи С. Л. Соболева. Сформулируем ее для простоты в случае $a_+ = a_- = a$.

Теорема 3. Пусть функция $u(x, t) \in H_{s, \gamma, a}(C)$ и пусть функции $f(x, t) \in H_{s'-m, \gamma, a_1}$, $g_{pj} \in H_{s'-b_{pj}-\gamma/2, \gamma, a_1}$, где $a < a'$, $s < s'$. Тогда в некоторой трубчатой окрестности подмногообразия C_p решение $u(x, t)$ задачи (2), (3) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \sum_k \sum_{i=0}^{r_{k-1}} t^i e^{-z_k t} \left\{ \sum_q a_{ikq}(\omega) \rho^{m-\gamma-p-q} + \right. \\ \left. + (1 + (-1)^{m-\gamma-p-q}) \rho^{m-\gamma-p-q} \ln \rho \right\} + u_1(x, t).$$

Здесь $a_{ikq}(\omega)$ — гладкие функции в трубчатой окрестности многообразия C_p ; ρ — расстояние от точки (x, t) до подмногообразия C_p .

Внешнее суммирование производится по всем полюсам $z_1, \dots, z_k$ с кратностями $r_1, \dots, r_k, \dots$, лежащими в полосе $a < \text{Re } z < a_1$, а остаточный член $u_1(x, t) \in H_{s', \gamma, a_1}(C)$.

Получены также теоремы конечности и об асимптотическом разложении для уравнений с переменными коэффициентами.

6. Пользуюсь случаем указать литературные ссылки, не отмеченные мной в заметке (7). Кограничные операторы (дополнительные потенциалы) применяли ранее М. И. Вишик и Г. И. Эскин в цикле их совместных работ (см., например, (8)). Метод преобразования Меллина для исследования краевых задач в плоской области с угловыми точками применял ранее Г. И. Эскин (9, 10). В процессе работы над статьей (7) Г. И. Эскин предоставил мне возможность ознакомиться с рукописью статьи (10).

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
9 VI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., 1953. ² С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ³ Б. Ю. Стернин, Тр. Моск. матем. общ., 15, 346 (1966). ⁴ S. Agmon, L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., 16, № 2 (1963). ⁵ В. А. Кондратьев, Тр. Моск. матем. общ., 16, 209 (1967). ⁶ М. С. Агранович, М. И. Вишик, УМН, 19, в. 3 (1964). ⁷ Б. Стернин, ДАН, 189, № 4 (1969). ⁸ М. И. Вишик, Г. И. Эскин, УМН, 20, в. 3 (1965). ⁹ Г. И. Эскин, УМН, 18, в. 3 (1963). ¹⁰ Г. И. Эскин, Тр. Моск. матем. общ., 21, 245 (1970).