

УДК 539.314

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. П. ШМАКОВ

О ЗАКОНАХ ОТРАЖЕНИЯ МАССОВЫХ СИЛ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ

(Представлено академиком Л. Н. Седовым 15 VI 1970)

Известно, что некоторые из граничных задач теории упругости могут быть решены путем суперпозиции решений Кельвина. К их числу относятся задачи Буссинеска, Черрути ⁽¹⁾ и Миндлина ⁽²⁾. Наиболее общей из них является задача Миндлина о действии сосредоточенной силы внутри упругого полупространства, граница которого свободна от внешних воздействий. В настоящей работе дано дальнейшее развитие и обобщение метода Миндлина путем реализации простой и общей идеи. В основе этой идеи лежит аналитическое продолжение решений уравнений теории упругости через плоскую границу. Знание законов аналитического продолжения (отражения) позволяет легко строить решения граничных задач в общем виде и получать законы отражения для массовых сил. Задача об аналитическом продолжении через плоскую границу рассматривалась в работах ^(3, 4).

В работе ⁽⁴⁾ аналитическое продолжение было использовано для решения задач теории упругости со смешанными граничными условиями. Некоторые из результатов указанной работы изложены в монографии ⁽⁵⁾.

Основные результаты данной работы сформулированы в следующей теореме.

Теорема. Пусть в полупространстве $x_3 > 0$, на границе $x_3 = 0$ которого отсутствуют: а) перемещения или б) напряжения, действуют массовые силы $\hat{F}_i$, причем $\hat{F}_i(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$ при $x < 0$ ($i = x_1, x_2, x_3$). Тогда перемещения, которые возникнут в упругом полупространстве $x_3 > 0$ от действия этих сил, можно рассматривать как решение упругой задачи для всего пространства, в котором действует следующая система массовых сил:

$$\begin{aligned} \text{а) } F_i &= (\hat{F}_i - \hat{F}_i') + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)(3-4\nu)} x_3 \left[2 \frac{\partial \hat{F}_3'}{\partial x_i} - \frac{1}{2(1-\nu)} x_3 \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})' \right] + \frac{2}{(1-2\nu)(3-4\nu)} \delta_{i3} [\hat{F}_3' - 2\nu x_3 (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})'] \quad (i = x_1, x_2, x_3); \\ \text{б) } F_i &= (\hat{F}_i + \hat{F}_i') - \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} x_3 \frac{\partial \hat{F}_3'}{\partial x_i} + 4(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{x_3}^{+\infty} \hat{F}_3' dx_3 + \\ &+ \frac{1}{1-2\nu} x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})' + 2(1-\nu) x_3 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{x_3}^{+\infty} (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})' dx_3 - \\ &- 2(1-\nu) \int_{x_3}^{+\infty} x_3 (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})' dx_3 \quad (i = x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$F_3 = \hat{F}_3 - \frac{1+2\nu(3-4\nu)}{1-2\nu} \hat{F}'_3 - \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} x_3 \frac{\partial \hat{F}'_3}{\partial x_3} + \frac{4\nu}{1-2\nu} x_3 (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})' + \\ + \frac{1}{1-2\nu} x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_3} (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})' + 2\nu \int_{x_3}^{+\infty} (\operatorname{div} \hat{\mathbf{F}})' dx_3.$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, δ_{is} — символ Кронекера и операция штрих означает замену x_3 на $(-x_3)$. Отметим, что интегралы могут оказаться расходящимися в обычном смысле, поэтому их следует понимать в смысле Адамара или, что то же самое, в смысле теории обобщенных функций ^(*).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Ляв, Математическая теория упругости, М., 1935. ² R. D. Mindlin, Physics, 7, 195 (1936); Сб. пер. Механика, 4, 118 (1952). ³ R. J. Duffin, J. Rat. Mech. and Analysis, 5, № 5, 939 (1956). ⁴ Е. И. Оболашвили, Rev. Roumaine Math. pures et appl., 11, № 8, 965 (1966). ⁵ В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа и др., Трехмерные задачи математической теории упругости, Тбилиси, 1968. ⁶ Ч. Солцгер, Сб. пер. Проблемы механики, 3, М., 1961, стр. 7.