Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 2

УДК 517.947.42 — *МАТЕМАТИКА*

В. Л. ЛЕВИН

О СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЕ СОСТАВНОГО ФУНКЦИОНАЛА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 5 III 1970)

В последние годы появился ряд работ, в которых описывались субдифференциалы выпуклых функционалов различных типов (см. ([1-10])). Популярность этой тематики связана с важной ролью, которую субдифференциалы играют в теории негладких экстремальных задач, что впервые заметили А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин ([1]). Большинство рассматривавшихся в указанных работах функционалов были составными, т. е. представляли собой композицию выпуклых отображений и конкретных выпуклых функционалов.

В настоящей заметке описывается субдифференциал составного функционала общего вида. Ограничимся случаем банаховых пространств, хотя приводимые ниже результаты справедливы и в более общей ситуации. Мы будем пользоваться понятиями теории полуупорядоченных линейных пространств Л. В. Канторовича и употреблять терминологию, в основном совпадающую с принятой в ([11]).

Пусть G — открытое выпуклое множество в вещественном банаховом пространстве X; Y — банахова решетка (KB-линеал по терминологии ([11])). Отображение $F: G\to Y$ называется в ы п у к л ы м, если

$$F[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$$

для любых $x_1, x_2\in G$ и любого $0<\lambda<1$.

Пусть U — открытое выпуклое множество в Y; $F: G\to U$ — непрерывное выпуклое отображение; $x_0\in G$; φ — выпуклый функционал на U. Простейшие примеры показывают, что этих условий недостаточно для выпуклости составного функционала $f(x)=\varphi[F(x)]$. Функционал f будет выпуклым, если дополнительно потребовать монотонность φ. Следующее предложение показывает, что в этом случае f будет и непрерывным.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть φ — монотонный выпуклый функционал на открытом подмножестве U банаховой решетки Y. Тогда он непрерывен.*

Далее функционал φ предполагается выпуклым и монотонным. Займемся описанием субдифференциала $\partial f(x_0)$.

Будем называть с у б д и ф ф е р е н ц и а л о м о т о б р а ж е н и я F в т о ч к е x_0 множество $\partial F(x_0)$ всевозможных непрерывных линейных отображений $A: X\to Y$, удовлетворяющих неравенству $Ax-Ax_0\leqslant F(x)-F(x_0)$ для всякого $x\in G$. Когда Y — числовая прямая, получаем известное определение субдифференциала выпуклого функционала.

Пусть Y — условно полная банахова решетка (KN-пространство по терминологии ([11])). Говорят, что Y о б л а д а е т с в о й с т в о м (А), если для всякой последовательности $(y_n)\subset Y$ из $y_n\downarrow 0$ следует $\|y_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Свойством (А) обладают многие банаховы решетки, в частности L_p при $1\leqslant p<\infty$, и оно играет важную роль в теории полуупорядоченных линейных пространств (см. ([11])). Следующий результат, по-видимому, является новым.

Предложение 2. *Пусть Y — условно полная банахова решетка. Тогда свойство* (А) *равносильно слабой относительной бикомпактности* * *ограниченных по упорядочению подмножеств Y.*

Теорема 1. *Пусть Y — условно полная банахова решетка, обладающая свойством* (А). *Тогда $\partial F(x_0)$ — непустое выпуклое множество, бикомпактное в слабой операторной топологии.*

Напомним, что слабая операторная топология на пространстве $H(X, Y)$ непрерывных линейных отображений $A: X \to Y$ задается базисом окрестностей нуля

$$W\{x_1, \ldots, x_m; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \{A \in H(X, Y): |\lambda_k(Ax_j)| \leqslant 1,$$
$$j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n\},$$

где $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ пробегают всевозможные конечные наборы элементов X и Y' соответственно.

Замечание. Если Y — произвольная банахова решетка, множество $\partial F(x_0)$ может оказаться пустым.

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть Y — условно полная банахова решетка, обладающая свойством* (А), $f(x) = \varphi[F(x)]$. *Тогда $\partial f(x_0)$ есть множество всевозможных функционалов $l(x)$, представимых в виде $l(x) = \lambda(Ax)$,* где $\lambda \in \partial\varphi[F(x_0)]$, $A \in \partial F(x_0)$.

Замечание. Для произвольной банаховой решетки Y эта теорема, вообще говоря, неверна.

Было бы интересно распространить теорему 2 на случай, когда x_0 — граничная точка области определения f, аналогично тому, как это сделано в работах ([8–10]) для функционалов φ типа интеграла и взятия максимума.

В заключение приведем одно полезное, хотя и простое предложение, относящееся к произвольным банаховым решеткам.

Предложение. 3. *Всякое волинейное отображение банахова пространства в банахову решетку непрерывно.*

Для доказательства нужно воспользоваться теоремой Банаха о замкнутом графике и одним свойством сходящихся последовательностей в банаховой решетке (([11]), теорема VII. 2. 1, стр. 196).

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, № 3, 395 (1965). [2] Б. Н. Пшеничный, Кибернетика, № 5, 46 (1965). [3] Е. Г. Гольштейн, ДАН, 173, № 5, 995 (1967). [4] В. Л. Левин, Матем. заметки, 4, № 6, 685 (1968). [5] А. И. Сотсков, Кибернетика, № 3, 81 (1969). [6] В. Л. Левин, Матем. сборн., 79 (121), № 2, 250 (1969). [7] M. Valadier, C. R., 268, 39 (1969). [8] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Функциональн. анализ и его приложения, 3, № 3, 61 (1969). [9] А. Д. Иоффе, УМН, 25, в. 4(154) (1970). [10] В. Л. Левин, УМН, 25, в. 4(154), 183 (1970). [11] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.

* Множество называется относительно бикомпактным, если бикомпактно его замыкание.