Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 2

УДК 519.281

МАТЕМАТИКА

Академик Ю. В. ЛИННИК, И. В. РОМАНОВСКИЙ

К ТЕОРИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Настоящая заметка примыкает к нашей предыдущей заметке ([1]) и использует ее терминологию; мы существенно опираемся также на заметку И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского ([2]). В теории последовательного оценивания можно отметить результаты асимптотического характера (см., например, ([3–6])) и «точного» характера (см. ([1, 7–9])). Укажем здесь результаты в обоих направлениях.

Будем рассматривать повторную скалярную выборку $x_1, x_2, \ldots$ из совокупности, принадлежащей семейству распределений P_θ. Будем предполагать $\theta \in \Theta$ скалярным параметром, заданным в некотором интервале Θ, и допускать, что существует плотность $f(x, \theta)$ по лебеговой или считающей мере. Количества вида $\partial^k \ln f(x, \theta) / \partial\theta^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, если они существуют, назовем информационными; как известно, $-E_\theta(\partial^2 \ln f(x, \theta) / \partial\theta^2)$ является информационным количеством Фишера (E_θ знак м.о. при значении параметра θ).

В заметке И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского ([2]) при определенных условиях, наложенных на $f(x, \theta)$ (в основном, на информационные количества), — условиях, которые мы будем далее называть условия И. — X. об отсутствии разрывов в информационных количествах (они касаются лишь количеств с $n \leqslant 20$) — дано, в частности, асимптотическое поведение дисперсии оценки Питмэна $\tilde{\theta}_n$ для параметра θ. Оценка Питмэна $\tilde{\theta}_n$ имеет вид

$$\tilde{\theta}_n = \int \theta p_n(\theta), \text{ где } p_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \Big/ \int \Big(\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)\Big) d\theta.$$

В интересных работах ([3–6]) по асимптотической теории процессов последовательного оценивания принят байесовский подход к вопросу: в данной заметке мы примем небайесовский подход. Мы будем рассматривать план последовательного оценивания $S = \{\tau, T_\tau\}$ как пару, состоящую из марковского момента остановки τ и статистики T_τ, несмещенно или асимптотически несмещенно оценивающей заданную функцию $g(\theta)$. Мы рассматриваем задачу нахождения оптимального плана S, минимизирующего величину $E_\theta(T_\tau - g(\theta))^2$ при условии

$$E_\theta \tau \leqslant n, \tag{1}$$

где n — заданное положительное число. Оптимальный для всех значений $\theta \in \Theta$ план S будет существовать весьма редко, и мы будем рассматривать здесь лишь асимптотически оптимальные планы. Последующие теоремы проиллюстрируют точку зрения, согласно которой при соблюдении условий И. — X. об отсутствии разрывов в информационных количествах, применение последовательного анализа может дать лишь бесконечно малый относительный выигрыш в среднем квадратичном уклонении по сравнению с методом выборок постоянного объема.

Теорема 1. *Пусть θ — параметр сдвига ($f(x, \theta)) = f(x - \theta)$ и выполнены условия И. — X. об отсутствии разрывов в информационных количествах. Тогда $\tilde{\theta}_{[n]}$ — несмещенная оценка θ, и для любого плана последо-*

вательного несмещенного оценивания имеем

$$D(T_\tau) \geqslant D(\bar\theta_{[n]})(1+O(1/n)). \qquad (2)$$

Теорема 2. *В общем случае при соблюдении условий И. — Х. об отсутствии разрывов в информационных количествах оценка $\bar\theta_{[n]}$ асимптотически несмещена с точностью $O(1/n)$, и для любого такого плана $S = \{\tau, T_\tau\}$ последовательного оценивания при условии* (1) *имеем*

$$E(T_\tau-\theta)^2 \geqslant E(\bar\theta_{[n]}-\theta)^2(1+O(1/n)). \qquad (3)$$

Таким образом, план $\{\tau=[n], \bar\theta_{[n]}\}$ выборки постоянного объема $[n]$ и применения оценки Питмэна $\bar\theta_{[n]}$ при данных условиях может быть относительно улучшен путем применения последовательного анализа не более чем на $O(1/n)$.

При наличии разрывов в информационных количествах положение может резко измениться, и применение последовательного анализа может значительно улучшить оценивание. Пример такой ситуации можно найти в заметке А. И. Шалыта [10]. Более широкий класс примеров рассчитан по просьбе авторов А. И. Шалытом и И. И. Яура; мы приведем их здесь. Мы будем рассматривать случай сдвигового параметра и распределения, имеющие плотность $f(x-\theta)$ по лебеговой мере, с носителем $|x-\theta| \leqslant 1/2$, непрерывную там, симметрическую и такую, что $f(x-\theta)=1$ при $|x-\theta \pm 1/2| \leqslant \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 > 0$. Ввиду того что информационное количество Фишера терпит разрыв (принимает два значения: 0 и ∞), здесь нельзя применять информационных неравенств типа Рао — Крамера — Волфовитца. Взамен этого надо иметь какую-либо «образцово хорошую» оценку θ, с которой сравнивать другие. В качестве таковой может служить оценка Питмэна $\bar\theta_{[n]}$ (где n — правая часть (1)). При $[n]\geqslant 2$ она является несмещенной и оптимальной в смысле дисперсии оценкой θ в классе всех «правильных» оценок (правильными оценками называются такие статистики $T(x_1, \ldots, x_n)$, что $T(x_1+c, \ldots, x_n+c) = T(x_1, \ldots, x_n)+c$ при любом c). Из работ [2, 10] вытекает, что существует такой план несмещенного последовательного оценивания $S=\{\tau, T_\tau\}$, что при $n\to\infty$ $D(T_\tau)D(\bar\theta_{[n+1]})^{-1}\to 1/3$. Таким образом, здесь применение последовательного анализа асимптотически втрое понижает дисперсию по сравнению с «образцово хорошей» оценкой при выборке постоянного объема.

Представляется интересным подробное выяснение того, каким образом появление разрывов в информационных количествах влияет на возможности улучшения процессов оценивания на основе применения последовательного анализа.

Будем рассматривать теперь мультиномиальные урновые схемы с k шарами ($k\geqslant 2$) и с возвращением или без возвращения (последний случай будем называть случаем бесповторной выборки). Пусть $p=(p_1, \ldots, p_k)$ — соответствующий вектор вероятностей. Мы будем интересоваться вопросами полноты соответствующих планов S первого вхождения для оценивания функций от вектора p (по поводу терминологии см. [1]). Для случая $k=2$ (биномиальный процесс) вопросы полноты (еще не до конца решенные в случае неограниченных планов) связаны с вопросами единственности изображения полиномов, в виде выражений, которые мы называем обобщенными полиномами Бернштейна. Пусть имеем биномиальный план S с границей ∂S; пусть $\{(x, y)\}$ — его фазовая плоскость и при $(x, y)\in\partial S$ $K_{\alpha\beta}(x, y)$ есть число возможных траекторий внутри S, идущих из точки (α, β) в (x, y). Тогда под обобщенным полиномом Бернштейна для непрерывной функции $f(\zeta)$, $\zeta\in[0, 1]$, будем понимать полином

$$B_f^S(\zeta) = \sum_{(x,y)\in\partial S} K_{00}(x, y) f\left(\frac{K_{10}(x, y)}{K_{00}(x, y)}\right)\zeta^x(1-\zeta)^y.$$

Здесь аргументом $f(\cdot)$ является несмещенная оценка ζ. Для случая плана постоянной выборки с границей ∂S: $x+y=n$ имеем обычный полином Бернштейна.

Для мультиномиального ограниченного плана первого вхождения при $n \geqslant 2$ неизвестны геометрические условия полноты, подобные тем, которые найдены для $n=2$. Мы можем, однако, указать достаточные геометрические условия полноты S.

Теорема 3. *Пусть для каждого $x \in \partial S$ существует такое число $i \leqslant k$, что все точки $y=(y_1, \ldots, y_n)$, удовлетворяющие условию*

$$y_i > x_i, \quad y_j \leqslant x_j \ (j \neq i), \quad \sum_j y_j = 1 + \sum_j x_j$$

недостижимы. Тогда план S полон.

Надо отметить, что для бесповторной выборки в данном случае не возникает отдельной проблемы полноты. Именно, справедлива следующая

Теорема 4. *Для того чтобы план S был полон при бесповторной выборке, необходимо и достаточно, чтобы он был полон при повторной выборке.*

Отметим еще, что асимптотические результаты (теоремы 1 и 2) для повторной выборки могут быть перенесены на случай однородных процессов с независимыми приращениями и непрерывным временем.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. А. Зайдман, Ю. В. Линник, И. В. Романовский, ДАН, 185, № 6, 1222 (1969). [2] И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, ДАН, 194, № 2 (1970). [3] P. I. Bickel, I. A. Yahav, Proc. V Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob., 1, 1965, p. 401. [4] P. I. Bickel, I. A. Yahav, Ann. Math, Stat., 39, № 2, 442 (1968). [5] P. I. Bickel, I. A. Yahav, Wahrsch. u. verw. Geb., 11, 257 (1969). [6] P. I. Bickel, I. A. Yahav, Ann. Math. Stat., 40, № 2, 417 (1969). [7] De Groot, Ann. Math., 30, 80 (1959). [8] S. Trybula, Rozprawy Matem., Warszawa, 1968. [9] Р. А. Зайдман, Ю. Б. Линник, В. Н. Судаков, Советско-Японский Симпозиум по теории вероятностей. Хабаровск, Август 1969 г., Изд. АН СССР, Новосибирск, 1969, стр. 122. [10] А. И. Шалыт, ДАН, 189, № 1, 57 (1969).