Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 517.11:(51.01+519.95) *МАТЕМАТИКА*

В. Я. ГЕРЧИУ, А. В. КУЗНЕЦОВ

О КОНЕЧНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИКАХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 14 V 1970)

1. В настоящей работе используются термины и обозначения из [8].

Исследования суперинтуиционистских логик высказываний, проводимые в Кишиневе с 1963 г., одной из своих целей имеют описание тех из этих логик, которые конечно аксиоматизируемы и притом порождаются формулами небольшой длины (длиной формулы называем ее пропозициональную длину, т. е. число вхождений переменных). Возникла эта задача в связи с гипотезой о финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских (суперконструктивных) исчислений высказываний [7а]. Гипотеза эта опровергнута [8], но остается открытым вопрос о том, существует ли алгоритм, позволяющий по формулам A и B разпознавать, имеет ли место $A \vdash B$, т. е. выводима ли B из A (в интуиционистском исчислении высказываний с постулированным правилом подстановки [6]).

Еще в 1961 г., когда гипотеза эта была высказана на семинаре в Московском университете, Ю. Т. Медведев сделал предположение, что она ложна, связав его с результатом Умэдзавы [16б], построившего убывающую цепь логик, упорядоченную по типу ω^ω. Это предопределило интерес к изоморфной вложимости различных систем в структуру (решетку, латицу) * $\mathfrak{L}$ всех суперинтуиционистских логик или в дуально изоморфную ей структуру $\mathfrak{M}$ всех многообразий псевдобулевых алгебр.

Еще один ориентир для исследований — нерешенная пока проблема функциональной полноты в интуиционистской логике, обобщаемая и на иные логики. Заключается она в требовании построить (практически удобный) алгоритм, позволяющий по списку формул распознавать, является ли он в данной логике функционально полным [7б]. Для логики алгебры Z_3 (т. е. первой матрицы Яськовского) такую проблему подробно исследовал и решил М. Ф. Раца [14а–в], получив удобный алгоритм **.

2. Говорим, что формула A дедуктивно равна формуле B (пишем $A \dashv\vdash B$), если $A \vdash B$ и $B \vdash A$, т. е. если $[A]=[B]$. Говорим, что они эквивалентны, если $\vdash A \sim B$ [$A \sim B$ означает $(A \supset B) \& (B \supset A)$; $\vdash D$ означает $a \supset a \vdash D$]. Формулу называем n-местной [7б], если число различных входящих в нее переменных равно n. Символом $A[B_1, B_2, \ldots]$ обозначаем результат подстановки формул $B_1, B_2, \ldots$ вместо, соответственно, переменных $a, b, \ldots$ в формулу A. Знаками $F_0, F_1, \ldots, F_{19}$ обозначаем соответственно следующие формулы:

$$a \supset a,\ a,\ a \vee \neg a,\ \neg a \vee \neg\neg a,\ \neg\neg a \vee (\neg\neg a \supset a),\ a \vee \neg b \vee (a \supset b),$$
$$a \vee (a \supset (b \vee \neg b)),\ (a \supset b) \vee (b \supset a),\ F_6[a, \neg b],\ F_3[\neg a, \neg b],$$
$$(a \supset b) \vee (b \supset F_2),\ F_6 \vee \neg\neg b,\ \neg a \vee (\neg a \supset b) \vee (b \supset a);\ a \vee (a \supset F_4[b]),$$
$$\neg\neg a \vee (\neg\neg a \supset (b \vee (b \supset a)),\ (a \supset b) \vee (b \supset F_3),\ \neg\neg a \supset ((b \supset a) \vee$$
$$\vee (\neg b \supset a)),\ \neg\neg a \vee \neg(a \& b) \vee \neg(a \& \neg b),\ F_{14}[a, \neg b] \cdot (\neg\neg a \supset b) \vee$$
$$\vee (\neg a \supset F_3[b])\ ***.$$

* По $\subseteq$ или по $\cap$ и замкнутому (относительно modus ponens) объединению.

** Обобщенный недавно им на алгебры вида $Z_2 + \ldots + Z_2$.

*** Пронумерованы эти формулы здесь так же, как в [4], хотя вместо F_{12} и F_{16} в [4] были другие, дедуктивно равные им формулы.

Отношением $\vdash$ множество $\{F_0, F_1, \ldots, F_{19}\}$ частично упорядочивается так, как показано на рис. 1. Действительно, все указанные на нем выводимости очевидны или вытекают из того, что следующие формулы принадлежат $[F_0]$ (т. е. интуиционистской логике): $F_3[b] \supset F_{11}$, $F_4[a\&b] \supset (F_4[(a \vee \neg a)\& b] \supset F_{15})$, $F_4[(a\vee \neg a)\& \neg b] \supset F_{16}$, $F_8 \supset F_{13}$, $F_7[a, \neg a] \supset F_3$, $F_8[b, a] \supset F_{15}$, $F_9[\neg a] \supset F_{18}$, $F_9 \supset F_{19}$, $F_{10}[a \vee \neg a, \neg\neg a] \supset F_4$, $F_{11}[\neg\neg a, a] \supset F_4$, $F_{12}[\neg a, a] \supset F_4$, $F_{12}[\neg a] \supset F_{17}$, $F_{13}[\neg\neg a, (a \vee \neg a) \& \neg b] \supset F_{18}$, $F_{15}[a \vee b, \neg a] \supset F_9$, $F_{16}[(a \vee \neg a)\&(b \vee \neg b), \neg a] \supset F_{19}$, $F_{17}[\neg a] \supset F_9$. А отсутствие иных выводимостей усматривается с помощью следующих алгебр ($\mathfrak{A}^+$ означает $\mathfrak{A} + Z_2$, а $\mathfrak{A}^n$ означает $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \times \ldots \times \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — n раз): 1) Z_2, 2) Z_3, 3) Z_3^+, 4) $Z_2 + Z_3$, 5) Z_5^+, 6) Z_7^+, 7) $(Z_3^+ \times Z_2)^+$, 8) Z_{11}, 9) $(Z_3^2)^+$, 10) $(Z_2^3)^+$, 11) $(Z_7 \times Z_2)^+$, 12) $(Z_5 \times Z_3)^+$; каждой из них соответствует на рис. 1 пунктир, показывающий, какие формулы (верные на ней) от каких (неверных) она отделяет.

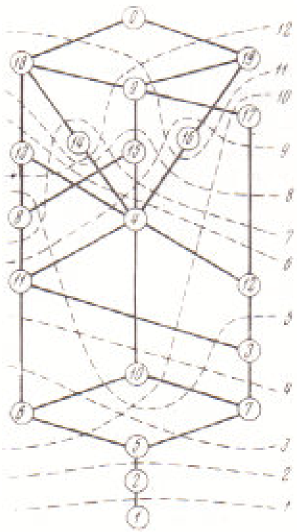

Рис. 1

3. Теорема 1. *Никакая из формул F_0, $F_1, \ldots, F_{19}$ не может быть дедуктивно равна никакой формуле меньшей длины; всякая формула длины $\leqslant 5$ дедуктивно равна одной из формул $F_0, F_1, \ldots, F_{19}$.*

Это обнаружено путем перебора случаев для формул, не содержащих переменных, отличных от a и b *, опирающегося на список всех (с точностью до эквивалентности) таких формул длины $\leqslant 3$ (их 200).

Формулы $F_0, F_1, \ldots, F_{19}$ не имеют отрицательных вхождений дизъюнкции. Поэтому из теоремы 3 статьи [8] и теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Любая логика, порожденная какими-нибудь формулами длины $\leqslant 5$, финитно аппроксимируема* **.

Заметим, что формулы F_0, F_1 и F_2 общеизвестны; неоднократно рассматривались также F_3 (см., например, [2], стр. 212, и [20г]), F_4 (см. [16б, 13, 20б]; эквивалентна a^8) и F_7 (см. [16а], стр. 186, [5, 12]); F_5 имеется в [16а] (в виде секвенции R_2; ср. [18]) и дедуктивно равна формуле Сметанича $(a \supset b)\vee(b \supset c)\vee(c \supset d)$ (см. [20в]); F_6 — формуле M из [20а], а также P_2 из [18]; F_8 — формуле P_2 из [9], а также характеристической формуле [20д] алгебры Z_5^+; F_{18} использована в [8]; $F_{11} \dashv\vdash F_4\&F_8$; $F_{12} \dashv\vdash F_4\&F_{17}$; $F_{15} \dashv\vdash F_9\&a^{10}$.

4. Говорим, что логики L_1 и L_2 *n*-местно равны, если логике L_1 принадлежат из n-местных формул все те и только те, которые принадлежат L_2. Всякая суперинтуиционистская логика n-местно равна логике некоторой (псевдобулевой) алгебры с n образующими. В частности, $[F_0]$ одноместно равна LZ [8]. Заметим, что из формул $F_0, F_1, \ldots, F_{19}$ принадлежат LZ те и только те, которые верны на Z_{11}. А логика $[\neg a_1 \vee (\neg a_1 \supset (\ldots \supset (\neg a_k \vee (\neg a_k \supset (\neg b \vee \neg\neg b))) \ldots))]$, где $k = 2^n - 1$, n-местно равна $[F_0]$ доказывается с помощью теоремы Гливенко [6]).

Логику называем *табличной* ***, если она есть логика некоторой конечной алгебры. Логику, n-местно равную табличной, называем *n-местно табличной*. В частности, если формула A не принадлежит LZ, то логика $[A]$ одноместно таблична. Если $F_3 \vdash A$, то логика $[A]$ двумест-

* Формулы длины $\leqslant 2n + 1$ при $n \geqslant 1$ дедуктивно равны n-местным.

** Метод, которым это доказано, на случай формул длины 6 не распространяется, так как, например, формула $((\neg\neg a \supset a) \supset (a \vee \neg a)) \supset (\neg a \vee \neg\neg a)$, эквивалентная a^9, устойчивой не является; ведь она не верна на Z_7, но верна на алгебре Z_9, в которую Z_7, рассматриваемая без $\vee$ ($\supset$ или $\neg$), изоморфно вложима.

*** Иногда называют конечной [15], хотя мощность ее бесконечна.

но табличной не является, так как каждая из формул a^1b, $a^2b, \ldots$ отделяется от F_3 алгеброй $Z_2 + Z_\infty$. Однако верна

Теорема 3. *Если $A \vdash F_{10}$, то логика $[A]$ n-место таблична при всяком $n = 1, 2, \ldots$* *.

Действительно, такая логика n-местно равна логике прямого произведения конечного числа алгебр вида $(Z_2^k)^{+\cdots+}$, где $k \leqslant 2^n$, так как на иных гёделевых алгебрах с n образующими не верна F_{10}.

5. Конечно аксиоматизируемые суперинтуиционистские логики составляют, как заметили Миура ([11]) и Янков, подструктуру в $\mathfrak{L}$. Ей дуально изоморфна структура $\mathfrak{F}$ всех формул — рассматриваемых с точностью до дедуктивного равенства — относительно $\vdash$ (ведь $A \vdash B$ равносильно $[B] \subseteq [A]$). Роль операций структуры $\mathfrak{F}$ играют конъюнкция & и бесповторная дизъюнкция $\vee'$ ($A \vee' B$ означает формулу $A \vee B_1$, где B_1 есть результат такого переименования переменных в B, при котором номера их (вернее, их мест в алфавитной последовательности всех переменных) увеличиваются на максимальный из номеров переменных, входящих в A). Структура $\mathfrak{F}$ дистрибутивна (ведь формула $A \vee' (B \& C)$ эквивалентна $(A \vee' B) \& (A \vee' C)$; ср. ([18])).

Заметим, что

$$F_3 \vee' F_6 \dashv\vdash F_{11},\quad F_4 \vee' F_8 \dashv\vdash F_{13} \& F_{15}\ {**},\ \text{а}\ F_6 \vee' F_7 \dashv\vdash F_{10} \& F_{11}.$$

Формулы длины $\leqslant 4$ порождают в $\mathfrak{F}$ подструктуру на 13 формул: $F_0, F_1, \ldots F_9, F_{11}, F_4 \vee' F_8$ и $F_6 \vee' F_7$ ***.

Формулы $A_1, A_2, \ldots$ называем (сильно) независимыми (ср. ([20а], [15], [16б])), если никакая из формул A_i не принадлежит $[A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots]$. Называем их сверхнезависимыми, если они порождают в $\mathfrak{F}$ свободную дистрибутивную подструктуру, являясь в ней свободными образующими. Это равносильно тому, что ни при каких попарно различных $i, \ldots, j, k, \ldots, l$ не имеет место

$$A_i \& \ldots \& A_j \vdash A_k \vee' \ldots \vee' A_l. \qquad (1)$$

Например, формулы F_{10}, F_{11}, F_{12} независимы (рис. 1), но не сверхнезависимы ($F_{11} \vdash F_{10} \vee' F_{12}$). У подструктуры, порождаемой в $\mathfrak{F}$ формулами длины $\leqslant 5$, мощность > 7500 (см. ([2]), стр. 208); ведь верна

Теорема 4. *Формулы $F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}$ сверхнезависимы* ****.

Бесповторная дизъюнкция формул, неверных на гёделевой алгебре, тоже не верна на ней. Поэтому для доказательства теоремы достаточно, рассматривая подходящие алгебры — некоторые подалгебры алгебр Z_{11}, $(Z_8 \times Z_3^+)^+$, $(Z_6 \times Z_3^{++})^{++}$, $((Z_3 \times Z_3^+)^{++} \times Z_3^+)^{++}$, — проверить, какие из формул $F_{13}, \ldots, F_{17}$ на них верны.

6. Теорема 5. *Для всякого целого положительного n существует n сверхнезависимых формул длины $2n + 2$. Примером являются те n формул, i-я из которых есть результат подстановки формулы $\neg a_i$ в формулу $a_1 \vee (a_1 \supset (\ldots \supset (a_n \vee (a_n \supset (\neg b \vee \neg\neg b))) \ldots))$ вместо a_i* ([3]).

Для доказательства достаточно проверять формулы на алгебрах вида $((\ldots((Z_2^2)^+ \times \mathfrak{A}_1)^+ \times \ldots)^+ \times \mathfrak{A}_n)^+$, где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ суть Z_1 или Z_2.

Из теоремы 5 (с помощью следствия 1 теоремы 1 из ([17])) вытекает

Следствие. *Всякая конечная дистрибутивная структура $\langle M; \cap, \cup \rangle$ изоморфно вложима в структуру $\mathfrak{F}$.*

---

* Из двуместного равенства логик L_1 и L_2 следует, что функционально полны в L_1 те же системы формул, что и в L_2. Поэтому для двуместно табличной логики проблема функциональной полноты разрешима — с помощью таких же построений, какие имеются в ([19]), §§ 10 и 13.

** Так как $\vdash F_{11}[b, a] \supset (F_{11}[a, a \& c] \supset (F_{11}[\neg a, \neg a \& c] \supset (F_3 \vee' F_6)))$ и $\vdash F_{13}[b, a] \supset (a^{10} \supset (F_9[a, c] \supset (F_9[\neg a, c] \supset (F_4 \vee' F_8))))$.

*** Дедуктивно равна $((\neg\neg a \supset a) \supset b) \vee (b \supset (a \vee \neg a))$.

**** ([4]); вообще, формулы множества $M \subseteq \{F_0, F_1, \ldots, F_{17}\}$ мощности $\geqslant 3$ сверхнезависимы, если и только если M включено в $\{F_4, F_8, F_{17}\}$, $\{F_8, F_{10}, F_{12}\}$, $\{F_8, F_{10}, F_{17}\}$, $\{F_{13}, F_{14}, F_{16}\}$, $\{F_8, F_{14}, F_{16}, F_{17}\}$, $\{F_9, F_{13}, F_{14}, F_{16}\}$ или $\{F_{13}, F_{14}, F_{15}, F_{16}, F_{17}\}$ (см. ([3]), но там есть описки в индексах).

7. Пример бесконечной последовательности независимых формул построил Янков ([20а]) *. Такую последовательность можно строить с помощью любой разбросанной формулы — ведь характеристические формулы тех (неизоморфных) конечных алгебр, на которых данная формула предверна, независимы. В направлении усиления результата Янкова получена

Теорема 6. *Формулы* $a^{2n+5} \supset (b \vee (b \supset a^{2n+4}))$, *где* $n = 1, 2, \ldots$, *сверхнезависимы.*

Действительно, формулы эти $A_1, A_2, A_3, \ldots$ дедуктивно равны характеристическим формулам алгебр $Z_7^+, Z_9^+, Z_{11}^+, \ldots$ соответственно. Чтобы доказать, что при попарно различных $i, \ldots, j, k, \ldots, l$ не может быть (1), достаточно заметить, что формулы $A_k, \ldots, A_l$ на алгебре $(Z_{2k+5} \times \ldots \times Z_{2l+5})^+$ не верны, и показать, что формулы $A_i, \ldots, A_j$ на ней верны. Если бы, например, A_i была на ней не верна, то в некоторый гомоморфный образ этой алгебры была бы изоморфно вложима алгебра $(Z_{2i+5})^+$ (см. ([20д]), стр. 30). А из этого, поскольку формула $a^7b \supset (c \vee (c \supset a^6b))$ (из ([8])), неверная на $(Z_{2i+5})^+$, верна на алгебре $Z_{2k+5} \times \ldots \times Z_{2l+5}$, следует, что в последнюю изоморфно вложима Z_{2i+5}. Но это противоречит тому, что на Z_{2i+5} не верно квазитождество ([10]) $(a^{2i+5} = 1) \supset (a^{2i+4} = 1)$ **, верное на алгебрах $Z_{2k+5}, \ldots, Z_{2l+5}$.

Вопрос о том, всякая ли счетная дистрибутивная структура изоморфно вложима в структуру $\mathfrak{F}$, остается открытым. Но имеет место

Следствие. *Всякое счетное частично упорядоченное множество* $\langle M; \leqslant \rangle$ *изоморфно вложимо в структуру* $\mathfrak{F}$.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
14 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. И. Адян, ДАН, **190**, 499 (1970). [2] Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952. [3] В. Я. Герчиу, Всесоюзн. симпозиум по матем. логике, тезисы, Алма-Ата, 1969, стр. 7. [4] В. Я. Герчиу, А. В. Кузнецов, IX Всесоюзн. алгебраич. коллоквиум, резюме, Гомель, 1968, стр. 54. [5] M. Dummett, J. Symb. Logic, **24**, 97 (1959). [6] С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957. [7] А. В. Кузнецов, а) Алгебра и логика, семинар, **2**, в. 4, Новосибирск, 1963, стр. 47; б) ДАН, **160**, 274 (1965). [8] А. В. Кузнецов, В. Я. Герчиу, ДАН, **195**, № 5 (1970) [9] C. G. McKay, J. Symb. Logic, **33**, 258 (1968). [10] А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М., 1970. [11] S. Miura, Nagoya Math. J., **26**, 167 (1966). [12] A. Monteiro, Rev. Union mat. argent. y Asoc. fis. argent., **20**, 308 (1962). [13] I. Nishimura, J. Symb. Logic, **25**, 327 (1960). [14] М. Ф. Раца, а) Сборн. Исследования по общей алгебре, Кишинев, 1965, стр. 99; б) ДАН, **168**, 524 (1966); в) Проблемы кибернетики, в. 21, 185 (1969). [15] A. S. Troelstra, Proc. Kohinkl. Nederl. Acad. Wet., **A68**, 141 (1965). [16] T. Umezawa, а) Nagoya Math. J., **9**, 181 (1955). б) J. Symb. Logic, **24**, 20 (1959). [17] Н. Г. Хисамиев, Алгебра и логика, семинар, **6**, в. 4, 107, Новосибирск (1967). [18] T. Hosoi, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, 14, 293 (1967). [19] С. В. Яблонский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, АН СССР, **51**, 5 (1958). [20] В. А. Янков, а) ДАН, **151**, 796 (1963); б) ДАН, 1035; в) ДАН, **181**, 33 (1968); г) Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, 1044 (1968); д) там же, **33**, 18 (1969).

---

* Доказав тем самым, что мощность структур $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{M}$ континуальна ([20в]). Аналогичный результат для групп сообщил на X алгебраическом коллоквиуме А. Ю. Ольшанский; но явно пример аналогичной последовательности групповых тождеств указал С. И. Адян ([1]).

** Формуле $a^{2i+5} \supset a^{2i+4}$ оно не равносильно. Это при $i = 1$ заметил Янков (см. сноску в конце статьи ([7б])).