Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 519.14 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ю. Л. ЗИМАН

НОВЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

(Представлено академиком С. А. Лебедевым 21 V 1970)

Среди задач целочисленного программирования хорошо известна задача о расположении производственных единиц, или задача размещения [1]. В этой задаче дается количество объектов n, которые надо разместить на $n' \geqslant n$ возможных местах, а также расстояния d_{ij} от места i до места j $(i, j = 1, 2, \ldots, n')$ и потоки f_{kl} между объектом k и объектом l $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$. Эти термины отражают обобщенные понятия и введены для того, чтобы как-то оценить размещение конкретной пары объектов в двух конкретных местах. Пусть после размещения все занятые места перенумерованы так, что каждому месту присвоен номер того объекта, который в это место помещен. Тогда оценкой размещения является сумма $L = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij} d_{ij}$, а решением задачи размещения является размещение всех элементов, минимизирующее величину L.

В такой постановке задачу нетрудно свести к квадратичной задаче о назначениях. Поскольку потоки заданы для пар объектов, то их можно представить в виде графа G с n вершинами, у которого всякие две вершины i и j, соответствующие объектам, для которых $f_{ij} \neq 0$, соединены ребром с весом f_{ij}. Для практических приложений удобно пользоваться матрицей смежности графа G, в которой единицы заменены соответствующими значениями потоков.

Из всех приложений нас прежде всего будет интересовать размещение ячеек электронного узла на плоскости, минимизирующее суммарную длину соединений между ячейками. В этом случае граф потоков является графом соединений, а все f_{ij} целые.

Рассмотрим более общую постановку задачи, лучше соответствующую инженерному заданию соединений. Назовем n соединяемых объектов *элементами*. На множестве N всех элементов укажем некоторое множество подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_m$ его элементов так, чтобы $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m = N$. Каждое S_i может включать от одного до n элементов из N. Подмножества S_i назовем *связями*, а количество элементов в каждой связи — *порядком* данной связи. Пусть теперь каждая связь включает те элементы, которые необходимо соединить между собой, а соединение выполняется в виде дерева на элементах этой связи. Таким образом, если порядок связи p, то существует $p^{(p-2)}$ различных способов выполнения соединений для этой связи.

Множество элементов N вместе с заданными на нем указанным образом связями назовем *схемой* *. Если для каждой связи выбрать конкретное дерево, то данная схема может породить граф G_s, который назовем *схемографом* этой схемы. Если порядки связей в схеме $p_1, p_2, \ldots, p_m$, то такая схема может породить $\prod\limits_{i=1}^{m} p_i^{(p_i-2)}$ различных схемографов. Каждый схемо-

* В заметке [2] термин «схема» обозначал другое понятие; в неопубликованной работе А. М. Степанова схемой назван аналогичный объект, но для элементов связи ничего не говорится о способе их соединения.

граф указывает один из способов выполнения соединений в схеме. Нетрудно видеть, что представляет собой обобщение графа без петель. Действительно, если порядки всех связей в схеме не превышают двух, то данная схема будет иметь один единственный схемограф, т. е. выродится в граф, ребра которого образованы связями с $p=2$. Связь с порядком, равным единице, соответствует, если элемент не входит ни в какую другую связь, изолированной вершине такого графа.

В соответствии с [2] назовем правильным графом граф, допускающий вложение в квадратную целочисленную решетку точек $\mathfrak{a}$ так, чтобы вершины находились в узлах решетки, а ребрами соединялись точки, соседние по горизонтали, вертикали или диагонали. Само вложение также назовем правильным. Будем вычислять расстояние d_{ij} между точками i и j на решетке $\mathfrak{a}$ как минимальное число звеньев ломаной линии, которую можно построить на $\mathfrak{a}$ так, чтобы каждое звено соединяло соседние точки на $\mathfrak{a}$. Нетрудно проверить, что такое определение расстояний удовлетворяет основным аксиомам метрики и, следовательно, задает на $\mathfrak{a}$ некоторую метрику.

Для некоторого вложения графа G с m ребрами в решетку $\mathfrak{a}$ вычислим сумму, которую назовем дефектом вложения:

$$\Delta=\sum_{i=1}^{m}(d_i-1).$$

Здесь d_i — расстояние на $\mathfrak{a}$ между концами i-го ребра, а суммирование ведется по всем ребрам графа G. Легко видеть, что для правильного вложения $\Delta=0$. Таким образом, дефект вложения дает количественную меру «неправильности» вложения. Теперь правильной схемой назовем такую схему, у которой хотя бы один схемограф правильный. Дефектом Δ_S вложения схемы в решетку $\mathfrak{a}$ назовем при данном вложении элементов минимальный дефект для всех схемографов схемы. Вложение схемы, для которого $\Delta_S=0$, назовем соответственно правильным вложением.

В терминах правильного вложения теперь можно сформулировать задачу размещения, когда соединения задаются схемой:

Найти вложение схемы S в решетку $\mathfrak{a}$ с минимальным дефектом Δ_S.

Исходя из такой постановки задачи, можно построить комбинаторные алгоритмы, например последовательного типа, отыскивающие вложение данной схемы с минимальным дефектом. Естественно, на размеры решетки $\mathfrak{a}$ могут быть наложены необходимые ограничения, связанные с конкретной конструкцией.

Добавим еще, что схемы вообще, и правильные схемы в частности, представляют собой интересные объекты для исследований как радикальные обобщения графов.

Институт точной механики и вычислительной техники
Академии наук СССР
Москва

Поступило
7 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, «Наука», 1969. [2] Ю. Л. Зиман, ДАН, 162, № 4 (1965).