

Ю. Е. ВАПНЭ

КРИТЕРИЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ ПРЯМОГО СПЛЕТЕНИЯ ГРУПП МАТРИЦАМИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 6 IV 1970)

Цель настоящей заметки — доказательство следующих двух предложений.

Теорема 1. Пусть A, B — нетривиальные группы, изоморфно представимые матрицами над полем характеристики 0. Прямое сплетение $W = A \times B$ изоморфно представимо матрицами над полем характеристики 0 тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) B — конечная группа,
- 2) B — конечное расширение абелевой группы без кручения, A — абелева группа без кручения.

Теорема 2. Пусть A, B — нетривиальные группы, изоморфно представимые матрицами над полем характеристики $p > 0$. Прямое сплетение $W = A \times B$ изоморфно представимо матрицами над полем характеристики p тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) B — конечная группа,
- 2) B — конечное расширение абелевой группы без кручения, A — абелева p -группа конечного периода.

Эти предложения дают критерий, упоминаемый в заглавии, и тем самым решают для сплетений вопрос 3.29 из (1). В работе (2) теоремы 1, 2 были доказаны автором для случая, когда активная группа B почти разрешима. В настоящей заметке общий случай сводится к этому частному случаю. Далее, из результатов Шевалле о полупростых алгебраических группах матриц ((3), стр. 23—02) вытекает, что для матричных групп над полем почти разрешимость равносильна выполнению нетривиального тождества (4). Поэтому теоремы 1, 2 следуют из (2) и лемм 3, 4, доказанных ниже.

Пусть R — кольцо без делителей нуля, $R[G]$ — групповое кольцо группы G над R . Если m — натуральное число, γ — элемент из $R[G]$, равный

$\sum_{i=1}^m r_i g_i$, где r_i — ненулевые элементы из R , $g_i \in G$, то пусть $Q(m, \gamma)$ обозначает множество всевозможных произведений не более чем из m элементов множества $\{g_2 g_1^{-1}, g_3 g_1^{-1}, \dots, g_m g_1^{-1}\}$. Обозначим еще

$Q(\gamma) = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q(m, \gamma)$. Множества $Q(m, \gamma)$, $Q(\gamma)$ на самом деле зависят не от элемента γ , а от его записи. Из контекста всегда будет ясно, какая запись имеется в виду.

Лемма 1. Пусть $\alpha, \beta \in R[G]$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha\beta = 0$, m — число слагаемых в несократимой записи α . Тогда множество $Q(m, \beta)$ содержит единицу (независимо от того, какая запись для β зафиксирована).

Доказательство. Пусть $\alpha = \sum_i k_i a_i$, $\beta = \sum_j l_j b_j$, где k_i, l_j — ненулевые элементы из R , $a_i, b_j \in G$, причем элементы a_i попарно различны. По условию $\alpha\beta = \sum_{i,j} k_i l_j a_i b_j = 0$. Поэтому $a_i b_i = a_{\varphi(i)} b_{\varphi(i)}$ для

всех i , где φ, ψ — функции, причем $\psi(i) \neq 1$ для любого i . Отсюда

$$a_{\psi(i)}^{-1} a_i = b_{\psi(i)} b_i^{-1}. \quad (1)$$

Так как φ отображает множество $\{1, 2, \dots, m\}$ в себя, то существуют такие элементы s, t этого множества, что $\varphi^s(t) = t$. Перемножая соотношения (1) при $i = \varphi(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^s(t)$, мы получим в левой части единицу, а в правой — элемент из $Q(m, \beta)$.

Лемма доказана.

Пусть $\bar{F}$ — свободная группа со свободными порождающими $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots$. Пусть R — кольцо с единицей. Возьмем в $R[\bar{F}]$ элемент

$$\xi = \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(r)}, \quad (2)$$

где суммирование ведется по всем подстановкам π на r символах, $\operatorname{sgn} \pi$ — знак подстановки π .

Лемма 2. *Множество $Q(\xi)$ не содержит единицы. В частности, любой простой коммутатор от элементов множества $Q(\xi)$, сопряженных последовательно элементами $y_1, y_2, \dots$, не равен единице.*

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, второе является его непосредственным следствием.

Пусть, напротив, некоторый элемент

$$x_{\pi_1(1)} \dots x_{\pi_r(r)} x_r^{-1} \dots x_1^{-1} \dots x_{\pi_n(1)} \dots x_{\pi_n(r)} x_r^{-1} \dots x_1^{-1}$$

из $Q(\xi)$, где $\pi_1, \dots, \pi_n$ — нетождественные подстановки, равен единице. Это означает, что существует некоторая последовательность сокращений, которая переводит вышеуказанное слово в пустое. На некотором шаге этой последовательности первое вхождение элемента $x_{\pi_i(i)}^{-1}$, $1 \leq i \leq r$, должно сократиться с некоторым вхождением элемента $x_{\pi_i(i)}$, тогда слово w_i , стоящее между этими вхождениями, должно было перейти в пустое слово на предыдущих шагах. Легко подсчитать, что $\log w_i = \pi_i(i) - i$, где $\log w_i$ — сумма показателей у всех букв, входящих в w_i . Но, как мы отметили, $w_i = 1$, поэтому $\log w_i = 0$. Отсюда $\pi_i(i) = i$, т. е. подстановка π_i тождественна. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть $W = (a) \circ G$, где (a) — бесконечная циклическая группа, G — группа. Если сплетение W изоморфно представимо матрицами над полем характеристики 0, то на G выполнено нетривиальное тождество.*

Доказательство. Пусть сплетение W изоморфно представлено матрицами над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0.

Заметим сначала, что матрицу a можно считать унитарной. Если группа G периодична, то на основании теоремы Шура на ней выполнено тождество ((³), стр. 533). Пусть G непериодична и g — ее элемент бесконечного порядка. Подгруппа (a, g) группы W изоморфна сплетению двух бесконечных циклических групп и, значит, разрешима. По теореме Мальцева ((³), стр. 535) группа (a, g) почти триангулируема; будем считать ее почти треугольной. При некотором n матрицы a^n и g^n треугольны, поэтому их коммутатор $c = [a^n, g^n]$ унитарен. На основании леммы 12 из ((²)) подгруппа (c, G) изоморфна W .

Итак, будем считать, что матрица a унитарна. Тогда и вся база F сплетения W унитарна. Существует ненулевой вектор v основного пространства, неподвижный относительно F . Пусть U — подпространство, натянутое на G -орбиту вектора v . Очевидно, U инвариантно относительно G и неподвижно относительно F , так как

$$vgf = vfgg^{-1}g = vf^{s-1}g = vg, \quad \text{где } f \in F, g \in G.$$

Это значит, что при подходящем выборе базы основного пространства элементы группы W имеют вид

$$w = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(w) & \varphi_{12}(w) \\ 0 & \varphi_{22}(w) \end{pmatrix},$$

причем $\varphi_{22}(F) = e$, где e — единичная матрица. Пусть K — ядро гомоморфизма φ_{11} . Если K тривиально, индукция по степени матриц завершает доказательство. Пусть K не тривиально. Так как нетривиальная нормальная подгруппа сплетения имеет нетривиальное пересечение с базой (см., например, леммы 8.1 и 8.2 из (6)), то $K \cap F \neq 1$. Зафиксируем некоторый неединичный элемент f из $K \cap F$. Очевидно, $\varphi_{11}(f) = e$, $\varphi_{22}(f) = e$.

Пусть V — линейное пространство всех матриц над полем k , имеющих те же размеры, что и матрица $\varphi_{12}(f)$. Легко видеть, что формула

$$u \sum n_i g_i = \sum n_i \varphi_{11}(g_i)^{-1} u \varphi_{22}(g_i), \quad n_i \in Z, \quad g_i \in G, \quad u \in V,$$

задает действие кольца $Z[G]$ на пространстве V . Это действие определяет кольцевой гомоморфизм $Z[G] \rightarrow \text{End } V$, где $\text{End } V$ — алгебра эндоморфизмов пространства V над полем k . Пусть I — ядро этого гомоморфизма.

Базу F сплетения W будем естественным образом рассматривать как точный циклический правый $Z[G]$ -модуль (см., например, (2)). Пусть $f = a^\alpha$, $\alpha \in Z[G]$. По условию $\alpha \neq 0$. Если $\beta \in I$, то

$$a^{\alpha\beta} = f^\beta = \begin{pmatrix} e & \varphi_{12}(f)^\beta \\ 0 & e \end{pmatrix} = 1,$$

откуда $\alpha\beta = 0$. Таким образом, все элементы из I аннулируют α .

Фактор-кольцо $Z[G]/I$ изоморфно вкладывается в алгебру $\text{End } V$. Пусть $(r-1)$ — размерность этой алгебры над k . Согласно (7), стр. 329), на ней выполнено стандартное тождество $\xi = 0$, где ξ — элемент из (2). Тогда $\beta = \xi(g_1, \dots, g_r) \in I$ для любых $g_1, \dots, g_r \in G$. Как мы заметили выше, $\alpha\beta = 0$. Пусть m — число слагаемых в несократимой записи элемента α . По лемме 1 множество $Q(m, \beta)$ содержит единицу. Пусть $q_1, \dots, q_s$ — все различные элементы из $Q(m, \beta)$. Очевидно, s зависит только от f и r , $q_i = w_i(g_1, \dots, g_r)$, где $w_i \in Q(m, \xi)$. Если $h_1, \dots, h_s$ — произвольные элементы из G , то простой коммутатор

$$[q_1^{h_1}, q_2^{h_2}, \dots, q_s^{h_s}] = 1.$$

Мы получили тождество на группе G . По лемме 2 оно не тривиально.

Лемма 4. Пусть $W = (a)zG$, где (a) — циклическая группа простого порядка p , G — группа. Если сплетение W изоморфно представимо матрицами над полем характеристики p , то на G выполнено нетривиальное тождество.

Доказательство почти не отличается от доказательства леммы 3. Нужно только заметить, что теперь матрица a унитарна по условию (ее порядок равен p), и вместо $Z[G]$ всюду рассматривать групповое кольцо над простым полем характеристики p .

Ввиду леммы 3 теорема 1 является теперь следствием аналогичной теоремы 1 и леммы 14 из (2). Точно так же ввиду леммы 4 теорема 2 является следствием теоремы 2 и леммы 15 из (2). Отметим顺便, что в доказательстве леммы 15 противоречие с тем, что элемент a имеет бесконечный порядок, получается более кратко и аккуратно следующим образом. Так как матрицы a^b , $b \in B$, принадлежат диагональной группе F_0 и имеют те же собственные значения, что и матрица a , то число этих матриц конечно. С другой стороны, они попарно различны в сплетении W_0 — противоречие.

В заключение автор выражает благодарность Ю. И. Мерзлякову за постоянное внимание и полезные обсуждения.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
26 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Коуровская тетрадь, Нерешенные задачи теории групп, 3-е изд., Новосибирск, 1968. ² Ю. Е. Вайнз, Матем. заметки, 7, № 2, 181 (1970). ³ C. Chevalley, Classification des groupes de Lie algébriques, Paris, 1958. ⁴ В. П. Платонов, Докл. АН БССР, 11, № 7, 581 (1967). ⁵ Б. И. Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, «Наука», 1966. ⁶ P. M. Neumann, Math. Zs., 84, 343 (1964). ⁷ Н. Джекобсон, Строение колец, ИЛ, 1961.