

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. А. ГЕЙЛЕР

О НЕПРЕРЫВНЫХ СЕЛЕКТОРАХ В РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 V 1970)

Настоящая заметка посвящена обобщению некоторых теорем Э. Майкла о непрерывных селекторах многозначных отображений ^(1, 2) на случай, когда многозначное отображение принимает значения в равномерном пространстве.

Далее E будет означать некоторое отдельное равномерное пространство, $\mathcal{U}$ — фильтр окружений его равномерности, $\mathcal{U}_0$ — некоторый фильтр окружений более слабой равномерности в E , чем исходная, имеющий счетный базис, E_0 — равномерное пространство, полученное путем надления E равномерностью, фильтром окружения которой является $\mathcal{U}_0$. Через $\mathfrak{P}(E)$, $\mathcal{C}(E)$, $B(E)$ будем обозначать соответственно множество всех подмножеств, всех полных подмножеств и всех бикомпактных подмножеств E .

Определение 1. Множество $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(E)$ называется равностепенно метризуемым посредством $\mathcal{U}_0$, если выполнено условие

$$(*) \forall V \in \mathcal{U} \exists U \subset \mathcal{U}_0 \forall A \in \mathfrak{A}: (A \times A) \cap U \subset V.$$

Если E метризуемо, то, очевидно, каждое $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(E)$ равностепенно метризуемо посредством $\mathcal{U}$. Если E — топологическая группа, надленная, скажем, правой равномерностью, H — метризуемая подгруппа E , то множество правых смежных классов по H равностепенно метризуемо.

Теорема 1. Пусть X и Y топологические пространства, $\mathfrak{A}$ — равностепенно метризуемое посредством $\mathcal{U}_0$ подмножество $\mathcal{C}(E)$. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{A} \\ h \downarrow & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{P}(E_0) \end{array}$$

где h непрерывно, φ и ψ полунепрерывны снизу, i — вложение. Тогда, если Y совершенно нульмерно*, то существуют непрерывные отображения $f: X \rightarrow E$ и $g: Y \rightarrow E_0$ такие, что $f(x) \in \varphi(x)$, $g(y) \in \psi(y)$ ($x \in X$, $y \in Y$) и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ h \downarrow & & \downarrow 1 \\ Y & \xrightarrow{g} & E_0 \end{array}$$

где 1 — тождественное отображение E на E_0 .

Доказательство. Пусть $(U_n)_{n \geq 1}$ базис фильтра $\mathcal{U}_0$ такой, что $U_n = U_{n+1}$, $U_{n+1} \subset U_n$ и все U_n открыты. Построим по индукции последовательности $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ и $(\psi_n)_{n \geq 0}$ полунепрерывных снизу отображений $\varphi_n: X \rightarrow \mathfrak{P}(E)$, $\psi_n: Y \rightarrow \mathfrak{P}(E_0)$ таких, что 1) $i \circ \varphi_n = \psi_n \circ h$, 2) $\psi_{n+1}(y) \subset$

* Т. е. в каждое открытое покрытие Y можно вписать открытое покрытие, состоящее из попарно непересекающихся множеств.

$\subset \psi_n(y)$, 3) $\psi_n(y)$ мало порядка U_n . Полагаем $\varphi_0 = \varphi$ и $\psi_0 = \psi$. Пусть при $k \leq n$ φ_k и ψ_k построены. Для каждого $a \in E$ пусть $G(a) = \{y \in Y: \psi_n(y) \cap U_{n+1}(a) \neq \emptyset\}$. Тогда $(G(a))_{a \in E}$ есть открытое покрытие Y . Возьмем открытое разбиение $(H_\lambda)_{\lambda \in L}$, вписанное в $(G(a))$, и для каждого $\lambda \in L$ выберем $a_\lambda \in E$ так, что $H_\lambda \subset G(a_\lambda)$. Пусть g_n непрерывное отображение Y в E , определяемое соотношением $g_n(y) = a_\lambda$, если $y \in H_\lambda$, и пусть $f_n = g_n \circ h$. Тогда можно положить $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) \cap U_{n+1}(f_n(x))$, $\psi_{n+1}(y) = \psi_n(y) \cap U_{n+1}(g_n(y))$.

В силу 5) $(\varphi_n(x))_{n \geq 1}$ и $(\psi_n(y))_{n \geq 1}$ — базисы фильтров Коши в $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ соответственно; пусть $f(x)$ и $g(x)$ — их пределы. Покажем, что f и g непрерывны. Рассмотрим, например, f (доказательство для g аналогично). Пусть $x_0 \in X$, $V \in \mathcal{U}$, $V(f(x_0))$ — соответствующая окрестность $f(x_0)$.

Возьмем открытое $W \in \mathcal{U}$ такое, что $W = W$ и $W \subset V$. В силу (*) найдется такое n , что $(\varphi(x) \times \varphi(x)) \cap U_n \subset W$ для всех $x \in X$. Пусть $\mathcal{O} = \{x \in X: \varphi_n(x) \cap W(f(x_0)) \neq \emptyset\}$; тогда $\mathcal{O}$ открыто. Покажем, что $x \in \mathcal{O}$ влечет $f(x) \in V(f(x_0))$. Выберем $a_0 \in \varphi_n(x) \cap W(f(x_0))$, в силу 3) $f(x) \in U_n(a_0)$. Отсюда $f(x) \in W(a_0)$, поэтому $f(x) \in W(f(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если E локально выпуклое пространство, и множества из $\mathcal{A}$ выпуклы, то Y достаточно считать паракомпактным.

С л е д с т в и е (П. Кендеров ⁽³⁾). Пусть E локально выпуклое пространство, F — его подпространство Фреше. Тогда естественное отображение $p: E \rightarrow E/F$ имеет непрерывное правое обратное.

2. Ниже будет дано определение почти метризуемого равномерного пространства, являющегося обобщением определения почти метризуемой группы, введенного Б. А. Пасынковым ⁽⁴⁾.

Через R ниже будет обозначаться отношение эквивалентности в E , графиком которого является множество $\bigcap \{U: U \in \mathcal{U}_0\}$.

О п р е д е л е н и е 2*. Будем называть E почти метризуемым посредством $\mathcal{U}_0$, если: 1) $\forall a \in E$ $R(a)$ есть бикомпакт, 2) $\forall V \in \mathcal{U} \exists U \in \mathcal{U}_0: U \subset V \circ R$.

О п р е д е л е н и е 3. Множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ называется равностепенно почти метризуемым посредством $\mathcal{U}_0$, если: 1) $\forall A \in \mathcal{A} \forall a \in A$ $R(a) \cap A$ есть бикомпакт; 2) $\forall V \in \mathcal{U} \exists U \in \mathcal{U}_0 \forall A \in \mathcal{A}: (A \times A) \cap U \subset V \circ R$.

Например, если E — топологическая группа, наделенная правой равномерностью, H — почти метризуемая подгруппа E , то множество правых смежных классов по H равностепенно почти метризуемо.

Т е о р е м а 2. Пусть X и Y — топологические пространства, $\mathcal{A}$ — равностепенно почти метризуемое посредством $\mathcal{U}_0$ подмножество $\mathcal{C}(E)$, и пусть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{A} \\ h \downarrow & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{P}(E_0) \end{array}$$

где h, φ, ψ, i как в теореме 1. Если Y совершенно нульмерно, то существуют полунепрерывные снизу отображения $\eta: X \rightarrow B(E)$ и $\theta: Y \rightarrow B(E_0)$, такие, что $\eta(x) \subset \varphi(x)$, $\theta(y) \subset \psi(y)$ ($x \in X, y \in Y$) и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & B(E) \\ h \downarrow & & \downarrow j \\ Y & \xrightarrow{\theta} & B(E_0) \end{array}$$

* Это определение предложил П. Кендеров.

где j — вложение. При этом $\eta(x) = R(f(x)) \cap \Phi(x)$, а $\theta(x) = R(g(x)) \cap \Psi(x)$, где $f: X \rightarrow E$, $g: Y \rightarrow E$ некоторые однозначные отображения.

Следствие 1. Пусть в обозначениях теоремы 2 X совершенно нульмерно, E — топологическая группа, а $\mathfrak{A}$ состоит из всех левых смежных классов по некоторой почти метризуемой полной по Вейлю подгруппе $H \subset E$. Тогда Φ имеет однозначный непрерывный селектор.

Следствие 2. Пусть S — открытое отношение эквивалентности в E , $p: E \rightarrow E/S$ — естественное отображение. Если множество смежных классов по S равностепенно почти метризуемо и содержится в $C(E)$, а отношение эквивалентности $R \cap S$ замкнуто, то для каждого паракомпактного подмножества $X \subset E/S$ (E/S наделено фактор-топологией) существует такое паракомпактное подмножество $Y \subset E$, что $p(Y) = X$ и $p|_Y$ совершенно.

Действительно, пусть $\Phi: X \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ задано соотношением $\Phi(x) = p^{-1}(x)$, тогда Φ полунепрерывно снизу. В силу известного результата В. И. Пономарева⁽⁵⁾, существует совершенно нульмерное пространство $\tilde{X}$ (абсолют X) и совершенное отображение $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$. Отображение $\Phi \circ \pi$ полунепрерывно снизу, поэтому по теореме 2 найдется однозначное отображение $f: \tilde{X} \rightarrow E$ такое, что отображение $\theta: x \rightarrow R(f(x)) \cap S(f(x))$ полунепрерывно снизу. Но в силу замкнутости $R \cap S$ θ полунепрерывно сверху, следовательно, можно положить $Y = \theta(X)$.

Точно так же из следствия 1 можно получить теорему 2 работы Б. А. Пасынкова⁽⁶⁾.

Следствие 3. Пусть S — отношение эквивалентности, открытое и регулярное* как в E , так и в E_0 . Если множество смежных классов по S есть равностепенно почти метризуемое посредством $\mathfrak{U}_0$ подмножество $C(E)$, а отношение эквивалентности $R \cap S$ замкнуто в E , то существует такое $X \subset E$, что сужение на X естественного отображения $p: E \rightarrow E/S$ совершенно, и $p(X) = E/S$.

Из следствия 3 вытекает следующая теорема П. Кендерова⁽⁸⁾:

Пусть G — топологическая группа, H — полная по Вейлю почти метризуемая нормальная подгруппа G , $p: G \rightarrow G/H$ естественное отображение. Тогда существует $X \subset G$ такое, что $p(X) = G/H$ и $p|_X$ совершенно.

Приношу глубокую благодарность проф. Д. А. Райкову, который привлек мое внимание к этой теме, П. Кендерову и М. Чобану за обсуждение и ценные замечания.

Мордовский
государственный университет
Саранск

Поступило
13 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. Michael, Ann. math., 63, 361 (1956). ² E. Michael, Duke math. J., 26, № 4, 647 (1959). ³ П. Кендеров, Вестн. Московск. ун-в., Мат. Мех. (в печати). ⁴ Б. А. Пасынков, ДАН, 161, № 2, 281 (1965). ⁵ В. И. Пономарев, ДАН, 143, № 1, 46 (1962). ⁶ Б. А. Пасынков, ДАН, 188, № 2, 286 (1969). ⁷ В. Л. Левин, Д. А. Райков, ДАН, 150, № 5, 981 (1963). ⁸ П. Кендеров, ДАН, 194, № 4 (1970).

* В. Л. Левин и Д. А. Райков называют отношение эквивалентности S в E регулярным, если $\forall V \in \mathfrak{U} \exists U \in \mathfrak{U}: S \circ U \subset V \circ S$.