Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 519.24+517.535.4 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. ЛОГВИНЕНКО, И. В. ОСТРОВСКИЙ, Л. И. РОНКИН

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ НОРМАЛЬНОГО ВЕКТОРА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 15 VI 1970)

Пусть $X=(x_1,\ldots,x_n)$ — случайный вектор, компоненты которого x_j, $1\leqslant j\leqslant n$, являются независимыми случайными величинами, распределенными по нормальному закону $N(0,1)$. Ю. В. Линник поставил вопрос об описании класса Ξ целых функций $\varphi(Z)$, $Z=(z_1,\ldots,z_n)\in C^n$, действительных при $Z=X\in R^n$ и таких, что случайная величина $y=\varphi(X)$ распределена по закону $N(0,1)$.

В теоретико-функциональных терминах класс Ξ можно определить как класс целых функций $\varphi(Z)$, $Z\in C^n$, действительных при $Z=X\in R^n$ и таких, что для любого борелевского множества $B\subset R^1$ выполняется равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_B e^{-y^2/2}\,dy=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\int\limits_{\varphi^{-1}(B)} e^{-|X|^2/2}\,dX, \tag{1}$$

где $\varphi^{-1}(B)=\{X\colon X\in R^n,\ \varphi(X)\in B\}$ — полный прообраз множества B в R^n, dX — элемент объема в R^n.

Как известно, класс Ξ непуст; общий вид линейной функции $\varphi(Z)$ класса Ξ таков:

$$\varphi(Z)=\sum_{k=1}^n a_k z_k,\ (a_1,\ldots,a_n)\in R^n,\quad \sum_{k=1}^n a_k^2=1. \tag{2}$$

Однако можно привести примеры и нелинейных функций класса Ξ (Ю. В. Линник):

$$\varphi(z_1,z_2)=z_1\cos[\eta(z_1^2+z_2^2)]+z_2\sin[\eta(z_1^2+z_2^2)], \tag{3}$$

$$\varphi(z_1,z_2,z_3)=z_1\cos[\eta(z_3)]+z_2\sin[\eta(z_3)],$$

где $\eta(z)$ — произвольная непостоянная целая функция, действительная при $z\in R^1$.

Для всякой целой функции $\varphi(Z)$, $Z\in C^n$, положим

$$M(r,\varphi)=\max_{Z\in C^n,\ |Z|\leqslant r}|\varphi(Z)|,\quad \left(|Z|^2=\sum_{k=1}^n|z_k|^2\right).$$

Ю. В. Линник и В. Л. Эйдлин ([1]) показали, что если $\varphi(Z)\in\Xi$ и $\ln M(r,\varphi)=O(\ln^2 r)$, то функция $\varphi(Z)$ имеет вид (2). В настоящей работе мы усилим этот результат.

Теорема 1. *Если* $\varphi(Z)\in\Xi$, *то либо* $\varphi(Z)$ — *линейная функция вида* (2), *либо*

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-1}\ln M(r,\varphi)>0. \tag{4}$$

Для функции (3) с $\eta(z)=kz$ выполняется $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1}\ln M(r,\varphi)=|k|$, поэтому утверждение теоремы 1 является в некотором смысле неулучшаемым.

Теорема 1 непосредственно вытекает из двух следующих лемм.

Лемма 1. *Если* $\varphi(Z) \in \Xi$, *то*

$$\int\limits_{|X|>1} |\varphi(X)| \, |X|^{-n-2} dX < \infty \quad (X \in R^n). \tag{5}$$

Лемма 2. *Если целая функция* $\varphi(Z)$ *не удовлетворяет условию* (4), *но удовлетворяет условию* (5), *то она линейна.*

Для доказательства леммы 1 обозначим через $E_{k,N}$ множество

$$E_{k,N} = \{X: X \in R^n, \ |X| < N, \ \sqrt{k}N \leqslant |\varphi(X)| < \sqrt{k+1}N\},$$

$$(N > 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\operatorname{mes}_n E_{k,N}$ — лебегова мера этого множества в R^n. Очевидно, что $\operatorname{mes}_n E_{k,N} < (2N)^n$. Покажем, что при $k \geqslant 1$ справедлива более точная оценка

$$\operatorname{mes}_n E_{k,N} \leqslant 2(\sqrt{2\pi})^{n-1}(\sqrt{k}N)^{-1}\exp\{-(k-1)N^2/2\}. \tag{6}$$

Для этого положим в (1) $B = \{y: y \in R^1, \ |y| > \sqrt{k}N\}$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_B e^{-y^2/2} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{k}N}^{\infty} e^{-y^2/2} dy < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{k}N} e^{-kN^2/2}, \tag{7}$$

а, с другой стороны,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} e^{-|X|^2/2} dX = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{|\varphi(X)| > \sqrt{k}N} e^{-|X|^2/2} dX \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{E_{k,N}} e^{-|X|^2/2} dX \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-N^2/2} \operatorname{mes}_n E_{k,N}. \tag{8}$$

Из (7), (8) и (9) получаем (6).

Используя (6), получаем

$$\int\limits_{|X|<N} |\varphi(X)| dX = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{E_{k,N}} |\varphi(X)| dx \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1}\, N \operatorname{mes}_n E_{k,N} \leqslant$$

$$\leqslant N(2N)^n + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}}\, 2(\sqrt{2\pi})^{n-1} \exp\{-(k-1)N^2/2\} = O(N^{n+1}).$$

Отсюда легко следует (5).

Лемму 2 мы сначала докажем в одномерном случае. Пусть $\varphi(z)$, $z \in C^1$, — целая функция, удовлетворяющая условиям леммы, т. е.

$$\liminf_{r \to \infty} r^{-1} \ln M(r, \varphi) = 0, \quad \int\limits_{|x|>1} |\varphi(x)| \cdot |x|^{-3} dx < \infty. \tag{9}$$

Из второго условия следует, что если $\varphi(z)$ — полином, то $\varphi(z)$ — линейная функция. Будем считать функцию $\varphi(z)$ трансцендентной.

Сначала покажем, что множество корней функции $\varphi(z)$ бесконечно. Действительно, в противном случае можно было бы указать полином $p(z)$ такой, что функция $\varphi_1(z) = \varphi(z)/p(z)$ вовсе не имеет корней. Функция $\varphi_1(z)$, очевидно, удовлетворяет условию $\liminf\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r, \varphi_1) = 0$. Известно ([2], стр. 48, [3], стр. 51), что всякая целая функция $\varphi_1(z)$, удовлетворяющая такому условию и не имеющая корней, постоянна. Мы приходим к выводу, что функция $\varphi(z)$ — полином, что противоречит предположению о ее трансцендентности.

Пусть теперь a_1, a_2, a_3 — произвольные три корня функции $\varphi(z)$. Рассмотрим целую функцию

$$\psi(z) = \int\limits_0^z \psi_1(\xi) d\xi, \quad \psi_1(\zeta) = \varphi(\zeta)/[(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta - a_3)].$$

Из (9) следует, что функция $\psi(z)$ удовлетворяет условиям

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r, \psi) = 0, \qquad \sup_{-\infty < x < \infty} |\psi(x)| < \infty. \tag{10}$$

По теореме Фрагмана — Линделефа ([4], стр. 211) всякая целая функция, удовлетворяющая условиям (10), будет ограничена в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ и, следовательно, по теореме Лиувилля, постоянна. Так как $\varphi(z) = \psi'(z)(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$, то мы приходим к выводу, что $\varphi(z) \equiv 0$, что противоречит трансцендентности функции $\varphi(z)$.

Докажем теперь лемму 2 в случае размерности $n \geqslant 2$. Обозначим через S^n единичную сферу в R^n и положим

$$\varphi_\Theta(z) = \varphi(z\Theta), \quad z \in C^1, \quad \Theta \in S^n.$$

Обозначая через $d\Theta$ элемент площади поверхности сферы S^n и учитывая, что $\varphi_{-\Theta}(z) = \varphi_\Theta(-z)$, имеем

$$\int_{|X|>1} |\varphi(X)| \cdot |X|^{-n-2}\, dx = \int_{S^n} d\Theta \int_1^\infty |\varphi_\Theta(x)|\, x^{-3}\, dx =$$

$$= {}^1/_2 \int_{S^n} d\Theta \int_{|x|>1} |\varphi_\Theta(x)| \cdot |x|^{-3} dx.$$

Так как по условию леммы интеграл (5) сходится, то для всех $\Theta \in S^n$, исключая, самое большое, множество меры 0 на S^n, будет сходиться интеграл $\int_{|x|>1} |\varphi_\Theta(x)| \cdot |x|^{-3}\, dx$. Замечая, что $\liminf_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r, \varphi_\Theta) = 0$, и применяя одномерный случай леммы 2, заключаем, что функция $\varphi_\Theta(z)$ линейна для всех $\Theta \in S^n$, исключая, самое большее, множество меры 0.

Пусть

$$\varphi(Z) = \sum_{k=0}^\infty p_k(Z)$$

разложение функции $\varphi(Z)$ в ряд по однородным полиномам. Тогда

$$\varphi(z\Theta) = \sum_{k=0}^\infty p_k(\Theta)\, z^k.$$

и, следовательно, $p_k(\Theta) = 0$ почти всюду на S^n при $k = 2, 3, \ldots$ Поэтому $p_k(Z) \equiv 0$, $k = 2, 3, \ldots$, и функция $\varphi(Z)$ — линейна. Леммы 1 и 2, а вместе с ними и теорема 1, доказаны.

Класс Ξ допускает обобщение. Пусть X — случайный вектор, о котором говорилось в начале статьи. Обозначим через Ξ_m, $1 \leqslant m \leqslant n$, класс вектор-функций $W = \Phi(Z) = (\varphi_1(Z), \ldots, \varphi_m(Z))$, где $Z \in C^n$, $\varphi_j(Z)$ — целые функции, действительные при $Z = X \in R^m$, удовлетворяющие следующему условию: компоненты случайного вектора $Y = \Phi(X)$ независимы и распределены по закону $N(0, 1)$. Очевидно, $\Xi_1 = \Xi$ и класс Ξ_m можно характеризовать условием

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \int_B e^{-|Y|^2/2}\, dY = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\Phi^{-1}(B)} e^{-|X|^2/2}\, dX, \tag{11}$$

где B — любое борелевское множество в R^m, а $\Phi^{-1}(B)$ — его полный прообраз в R^n. Полагая в (11) $B = \{Y\colon\ Y = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m,\ y_j \in A\}$, где A — любое борелевское множество в R^1, и замечая, что тогда $\Phi^{-1}(B) = \varphi_j^{-1}(A)$, убеждаемся в справедливости такого утверждения (Ю. В. Линник: если $\Phi(Z) = (\varphi_1(Z), \ldots, \varphi_m(Z)) \in \Xi_m$, то $\varphi_j(Z) \in \Xi$, $j = 1, \ldots, m$. С помощью этого утверждения из теоремы 1 получаем более общий факт.

Теорема 2. *Пусть $\Phi(Z) = (\varphi_1(Z), \ldots, \varphi_m(Z)) \in \Xi_m$. Тогда о каждой из функций $\varphi_j(Z)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, можно утверждать следующее: либо*

$\varphi_j(Z)$ — *линейная функция вида* (2), *либо* $\varphi_j(Z)$ *удовлетворяет условию*

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-1}\ln M(r, \varphi_j) > 0.$$

Выражаем глубокую благодарность В. С. Азарину, А. А. Гольдбергу и Б. Я. Левину за ценные замечания.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
18 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, В. Л. Эйдлин, Теория вероятности и ее примен., 13, в. 4, 751 (1968). [2] У. Хейман, Мероморфные функции, М., 1966. [3] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, М., 1970. [4] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 2, М., 1968.