Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 1

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Б. А. ЕФИМОВ, В. М. КУЗНЕЦОВ

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТИПАХ ДИАДИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 6 IV 1970)

Говорят ([1], т. 1, стр. 116), что пространства X и Y являются пространствами одного и того же топологического типа, если X гомеоморфно Y.

Основная теорема. *Пусть τ — бесконечный кардинал. Тогда:* (I). *Существует ровно* $\exp\tau$ *различных топологических типов диадических бикомпактов веса τ — столько же, сколько всех типов бикомпактов веса τ.* (II). *Существует ровно* $\exp\exp\tau$ *топологических типов диадических бикомпактов плотности τ — столько же, сколько всех типов бикомпактов плотности τ.* (III). *Существует ровно* $\exp\exp\tau$ *топологических типов плотных и псевдокомпактных подмножеств обобщенного канторовского дисконтинуума D^τ, веса $\tau \geqslant \aleph_1$ — столько же, сколько всех типов вполне регулярных пространств веса τ.* (IV). *Существует ровно* $\exp\exp\exp\tau$ *топологических типов диадических пространств плотности τ — столько же, сколько всех различных типов вполне регулярных пространств плотности τ**.

Эта теорема является обобщением и усилением ряда результатов Мазуркевича и Серпинского [2], Мостовского ([3], стр. 44), М. Я. Перельмана [4], И. И. Паровиченко [5], Райхбаха [6] (обширная библиография в [1], т. 1). Заметим, что все оценки сверху получаются легко. В самом деле, в силу теоремы А. Н. Тихонова, каждое вполне регулярное пространство веса τ топологически содержится в тихоновском кубе I^τ (бикомпакты — в качестве замкнутых подмножеств). Поэтому количество топологических типов бикомпактов веса $\leqslant\tau$ не превосходит мощности множества всех замкнутых подмножеств I^τ, т. е. $\exp\tau$, а количество топологических типов вполне регулярных пространств не превосходит мощности множества всех подмножеств I^τ, т. е. $\exp\exp\tau$. Далее, в силу теоремы Э. Чеха [8], каждый бикомпакт X плотности $\leqslant\tau$ является непрерывным образом βT_τ — стоун-чеховской компактификации дискретного пространства мощности τ. Тогда $wX \leqslant w(\beta T_\tau) \leqslant \exp\tau$ и можно применить предыдущие рассуждения. Наконец, рассматривая компактификацию bX произвольного вполне регулярного пространства X плотности $\leqslant\tau$, получаем бикомпакт bX плотности $\leqslant\tau$. Тогда $wX \leqslant w(bX) \leqslant \exp\tau$. Отсюда количество таких пространств не провосходит мощности множества всех подмножеств тихоновского куба $I^{\exp\tau}$, т. е. $\exp\exp\exp\tau$. Основная трудность в доказательстве подобных теорем — получение оценок снизу, так как при этом надо «построить» или доказать существование очень «большого» множества различных пространств с заранее заданными свойствами. Заметим, что в основной теореме рассмотрен довольно узкий класс пространств — диадические (например, каждое пространство этого класса удовлетворяет условию Суслина), а оценки на мощность те же, что и в общей ситуации**.

§ 1. Метод построения «большого» множества би-

* Диадический бикомпакт — непрерывный образ D^τ, плотное подмножество диадического бикомпакта называется диадическим пространством в смысле В. И. Пономарева [9]. Основные свойства диадичности см. в ([1], т. 2) или в [10]. Плотностью sX пространства X мы называем минимум мощностей всюду плотных в X множеств. Через $\exp\tau$ обозначается 2^τ, wX — вес X.

** Поражает воображение IV пункт основной теоремы. Из него, например, следует, что существует гипергиперконтинуум различных типов сепарабельных диадических пространств!

компактов*. Пусть ω_τ — наименьший ординал мощности τ и γ_α — произвольный ординал: $0 < \gamma_\alpha \leqslant \omega_\tau$. Обозначим через $F(\gamma_\alpha)$ множество всех ординалов меньших или равных $\omega_\tau^{\gamma_\alpha}$, наделенное интервальной топологией. Нетрудно показать, что $F(\gamma_\alpha)$ является нульмерным бикомпактом веса τ и $F(\gamma_\alpha)$ гомеоморфно $F(\gamma_\beta)$ тогда и только тогда, когда $\gamma_\alpha = \gamma_\beta$. Ординал γ_α называется порядком бикомпакта $F(\gamma_\alpha)$ или порядком точки $\omega_\tau^{\gamma_\alpha}$, которая является последней в нем.

Теорема 1. *Существует ровно* $\exp\tau$ *топологических типов нульмерных бикомпактов* $A(\zeta)$ *веса* τ, *каждый из которых имеет следующее строение: для всякой окрестности* $U \subset A(\zeta)$ *существует окрестность* $V \subset U$, *которая или гомеоморфна канторову совершенному множеству, или содержит изолированную точку.*

Доказательство. Пусть E — множество всех ординалов меньших или равных $\eta = \omega_\tau^{\omega_\tau}$. В интервальной топологии E является нульмерным бикомпактом веса τ. Вставим в каждый интервал $(\alpha, \alpha+1)$ канторово множество C так, чтобы левый конец C совпал с α, а правый — с $\alpha+1$. Полученный бикомпакт обозначим через X. Рассмотрим бикомпакт $Z = (E \times E) \cup [(0, \eta) \times X]$. Для каждой точки $\alpha \in E$ положим $S(\alpha) = \{(x, y) \in Z, x = \alpha\}$. Ясно, что $S(\alpha)$ подобно E для всех $\alpha \in E$. Далее, пусть T — множество всех не предельных ординалов в E. Ясно, что T — дискретно в E и $\bar{T} = E$. Пусть $\zeta = \{\gamma_\alpha\}$, $\alpha < \omega_\tau$, произвольное множество попарно различных ординалов таких, что $0 < \gamma_\alpha \leqslant \omega_\tau$. Легко понять, что мощность множества всех таких ζ равна $\exp\tau$. Для каждого $\gamma_\alpha \in \zeta$ выберем вполне упорядоченное множество $F(\gamma_\alpha) \subset S(\alpha)$, $\alpha \in T$, порядковый тип которого равен $\omega_\tau^{\gamma_\alpha}+1$ и точка (α, η) имеет порядок относительно $F(\gamma_\alpha)$ равный γ_α. Это возможно, так как $S(\alpha)$ подобно E. Положим $A(\zeta) = \bigcup_{\alpha\in T} F(\gamma_\alpha) \cup \bigcup_{\alpha\in E-T} S(\alpha) \cup [(0, \eta) \times X]$. Тогда $A(\zeta)$ в силу дискретности T и замкнутости $F(\gamma_\alpha)$ для каждого $\alpha \in T$ является замкнутым подмножеством Z и потому бикомпактом. Докажем, что если $\zeta_1 \neq \zeta_2$, то $A(\zeta_1)$ не гомеоморфно $A(\zeta_2)$. Допустим, что $A(\zeta_1)$ гомеоморфно $A(\zeta_2)$ и в то же время существует $\gamma_\alpha \in \zeta_1$ такой, что $\gamma_\alpha \notin \zeta_2$. Так как при гомеоморфизмах совершенная часть переходит в совершенную часть, то $(0, \eta) \times X \subset A(\zeta_1)$ переходит в $(0, \eta) \times X \subset A(\zeta_2)$. Так как к точкам из E близки изолированные точки, а вблизи от точек из $X - E$ нет изолированных точек, то $E \times (0, \eta) \subset A(\zeta_1)$ переходит в $E \times (0, \eta) \subset A(\zeta_2)$. Поэтому $T \times (0, \eta) \subset A(\zeta_1)$ переходит в $T \times (0, \eta) \subset A(\zeta_2)$. Это означает, что точка $(\alpha, \eta) \in A(\zeta_1)$, имеющая порядок γ_α относительно $F(\gamma_\alpha)$, $\alpha \in T$, переходит в некоторую точку $(\alpha', \eta) \in A(\zeta_2)$, имеющую тот же порядок γ_α относительно $F(\gamma_{\alpha'})$. Но это противоречит тому, что $\gamma_\alpha \notin \zeta_2$. Таким образом, $(\zeta_1 \neq \zeta_2) \Leftrightarrow (A(\zeta_1) \neq A(\zeta_2))$. Это означает, что мощность множества всех топологических типов вида $A(\zeta)$ не меньше мощности множества всех последовательностей $\zeta = \{\gamma_\alpha\}$, т. е. $\exp\tau$. Можно показать, что каждый $A(\zeta)$ обладает нужными нам свойствами. Теорема доказана.

§ 2. Диадический букет. Пусть X и Y — топологические пространства гомеоморфные D^τ и пусть $f\colon A \to B$ гомеоморфизм, где $A \subset X$ и $B \subset Y$. Обозначим через $\mathfrak{D}(A)$ пространство, полученное приклеиванием множества X к множеству Y по отображению f. Иными словами, элементами разбиения являются отдельные точки $x \in (X \oplus Y) - (A \oplus B)$ и пары $(x, f(x))$, если $x \in A$. Пространство $\mathfrak{D}(A)$ назовем диадическим букетом веса τ над A. Очевидно, что $\mathfrak{D}(A)$ является диадическим бикомпактом, если A замкнуто в X. Более того, $\mathfrak{D}(A)$ является неприводимым образом D^τ, если A — замкнуто и нигде не плотно в X. Отметим, что букет $\mathfrak{D}\{x\}) = D^\tau \vee D^\tau$ рассматривался в ([5]), а букет $\mathfrak{D}(\alpha T)$, где αT компактификация Александрова дискретного пространства T несчетной мощности, рассматривался Энгелькингом ([11]). Характером $\chi(A)$ пространства A назо-

* Мы несколько видоизменяем и обобщаем конструкцию Райхбаха ([6]), которая дает континуум метрических компактов.

вем $\sup \chi(x, A)$, где $\chi(x, A)$ — характер точки x в A, т. е. минимум мощностей фундаментальных систем окрестностей точки x в A.

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{D}(A)$ — *диадический букет веса* $\tau \geqslant \aleph_1$ *над* A, *причем* $\chi(A) = \mathfrak{n} < \tau$. *Тогда* $\mathfrak{D}(A)$ *не гомеоморфно* D^τ.

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{D}(A) = D^\tau$. Тогда по теореме одного из авторов [8] всякое каноническое замкнутое подмножество $\mathfrak{D}(A)$ имеет тип G_δ. Отсюда $\overline{X}$ имеет тип G_δ. Следовательно, $V = \mathfrak{D}(A) - \overline{X}$ имеет тип F_σ. С другой стороны, $A = Y - V = D^\tau - V$. Значит, для каждой точки $x \in A$ имеем

$$\chi(x, D^\tau) \leqslant \chi(x, A) \cdot \chi(A, D^\tau) \leqslant \mathfrak{n}\aleph_0 = \mathfrak{n} < \tau.$$

Это противоречит тому, что $\chi(x, D^\tau) = \tau$ для всех $x \in D^\tau$ [8]. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы. (I). Без ограничения общности предположим, что $\tau \geqslant \aleph_1$. Пусть $\Gamma = \{A_\xi\}$ — семейство мощности $\exp \tau$ попарно не гомеоморфных нульмерных бикомпактов веса τ, построенное в § 1. В силу теоремы Н. Б. Веденисова [10], каждый A_ξ топологически содержится в D^τ в качестве замкнутого подмножества. Рассмотрим семейство $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{D}(A_\xi)\}$ диадических букетов веса τ над A_ξ. Докажем, что $\mathfrak{D}(A)$ не гомеоморфно $\mathfrak{D}(B)$, если A не гомеоморфно B. Отсюда, как нетрудно понять, будет следовать утверждение (I) нашей теоремы. Допустим, противное. Пусть $f\colon \mathfrak{D}(A) \to \mathfrak{D}(B)$ гомеоморфизм. Покажем, что $f(A) \subseteq B$. Допустим, что существует точка $x \in A$, такая, что $y = f(x) \in D^\tau - B$. Это означает, что существует открыто-замкнутая окрестность W точки y гомеоморфная D^τ. Пусть U открыто-замкнутая окрестность точки x такая, что $f(U) \subset W$. Обозначим через $U_0 = A \cap U$. По теореме 1 существует окрестность $V_0 \subset U_0$, которая или гомеоморфна $D^{\aleph_0}$, или содержит изолированную точку. (В последнем случае, в качестве V_0 мы рассмотрим эту изолированную точку.) Пусть V открыто-замкнутое в $\mathfrak{D}(A)$ множество, содержащееся в U, и такое, что $V_0 = V \cap A$. Тогда V гомеоморфно или $\mathfrak{D}(D^{\aleph_0})$ или $\mathfrak{D}(\{x\})$. Следовательно, по лемме, V не гомеоморфно D^τ ($\tau \geqslant \aleph_1$). С другой стороны, так как f — гомеоморфизм, то $f(V)$ — открыто-замкнутое подмножество $W = D^\tau$ и, следовательно, $f(V)$ гомеоморфно D^τ. Противоречие. Таким образом, $f(A) \subseteq B$. Аналогично доказывается, что $f^{-1}(B) \subseteq A$. Отсюда $f(A) = B$, вопреки предполагаемому, Итак (I) доказано.

(II). Положим $\mathfrak{m} = \exp \tau$, $\tau \geqslant \aleph_0$. Тогда по теореме Хьюита — Марчевского — Пондичери [10] * будет $sD^\mathfrak{m} \leqslant \tau$. Отсюда каждый из построенных в (I) бикомпактов $\mathfrak{D}(A_\xi)$, $A_\xi \subset D^\mathfrak{m}$, имеет вес $\mathfrak{m}$ и плотность $\leqslant \tau$. Число попарно не гомеоморфных бикомпактов вида $\mathfrak{D}(A_\xi)$ веса $\mathfrak{m}$ равно $\exp \mathfrak{m} = \exp \exp \tau$, что и требовалось доказать.

(III). Пусть $\tau \geqslant \aleph_1$. Обозначим через Σ множество всех точек D^τ, у которых лишь счетное число координат отлично от нуля. Заметим, что Σ плотное и псевдокомпактное подмножество D^τ веса τ, являющееся пространством Фреше — Урысона секвенциальное замыкание любого подмножества в Σ совпадает с топологическим замыканием). В силу равенства $\tau = 2\tau$ пространство D^τ можно представить в следующем виде:

$$D^\tau = D^{\tau_1} \times D^{\tau_2} = \bigcup_{x \in D^{\tau_1}} M_x, \text{ где } M_x = D^{\tau_2} \text{ и } M_x \cap M_y = \phi, \text{ при } x \neq y, \quad (1)$$

причем $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Для $X \subset D^{\tau_1}$ положим $F(X) = \bigcup_{x \in X} M_x \cup \Sigma$ и обозначим через $\mathfrak{F}$ семейство множеств $F(X)$, где X пробегает семейство всех подмножеств пространства D^{τ_1}. Для каждого X пространство $F(X)$ является плотным и псевдокомпактным подмножеством D^τ. Далее, если $x_0 \in X - Y$, то $M_{x_0} \subset F(X)$. С другой стороны, $M_{x_0} \not\subset F(Y)$, так как $M_{x_0} \cap \bigcup_{x \in X} M_x = \phi$

---

* Аналогичную теорему доказал в 1941 г. М. Я. Перельман [4].

и Σ не содержит никакого экземпляра $D^\tau = M_x$. (Напомним, что при $\tau \geqslant \aleph_1$ пространство Σ — Фреше — Урысона, а D^τ не является таковым.) Таким образом мощность семейства $\mathfrak{F}$ равна $\exp\exp\tau$. Далее заметим, что для каждого $F(X) \in \mathfrak{F}$ мощность множества всех непрерывных отображений $F(X)$ в D^τ, которое мы обозначим через $\mathfrak{F}(X)$, равна $\exp\tau$. В самом деле, в силу непрерывности, каждое отображение $f\colon F(X) \to D^\tau$ однозначно задается отображением некоторого плотного подмножества $M \subset F(X)$ мощности τ в D^τ. С другой стороны, мощность множества всех отображений (не обязательно непрерывных) M в D^τ не превосходит $(\operatorname{card} D^\tau)^{\operatorname{card} M} = (\exp\tau)^\tau = \exp\tau$. Таким образом, $\operatorname{card}\mathfrak{F} = \exp\exp\tau$ и $\operatorname{card}\mathfrak{F}(X) = \exp\tau$. Отсюда немедленно следует, что в D^τ существует $\exp\exp\tau$ топологических типов плотных и псевдокомпактных подмножеств. Итак (III) доказано.

(IV). Положим $\mathfrak{m} = \exp\tau$. Тогда $sD^\mathfrak{m} \leqslant \tau$. Пусть K какое-нибудь плотное множество $D^\mathfrak{m}$ мощности τ. Представим $D^\mathfrak{m}$ в виде (1), если τ_1, τ_2 и τ заменяются на $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ и $\mathfrak{m}$. Для $X \subset D^{\mathfrak{m}_1}$ положим $F(X)_1 \bigcup\limits_{x \in X} M_x \cup K$. Снова обозначим через $\mathfrak{F}$ семейство множеств $F(X)$, где X пробегает семейство всех подмножеств пространства $D^{\mathfrak{m}_1}$. Для каждого X пространство $F(X)$ является плотным подмножеством $D^\mathfrak{m}$, причем $sF(X) \leqslant \tau$. Так как $\exp\mathfrak{m} = \operatorname{card} D^\mathfrak{m} > \operatorname{card} K = \tau$, то $(F(X) = F(Y)) \Leftrightarrow (X = Y)$. Таким образом, $\operatorname{card}\mathfrak{F} = \exp\exp\mathfrak{m} = \exp\exp\exp\tau$. Далее, рассуждая так же как в (III), получим, что мощность множества всех непрерывных отображений $F(X)$ в $D^\mathfrak{m}$ не превосходит $(\exp\mathfrak{m})^\tau = \exp\exp\tau$ для каждого $F(X) \in \mathfrak{F}$. Отсюда мы немедленно получаем, что существует $\exp\exp\exp\tau$ топологических типов плотных подмножеств $D^\mathfrak{m}$, каждый из которых имеет плотность $\leqslant \tau$. Основная теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Для любого кардинала* $\tau \geqslant \aleph_0$ *существует ровно* $\exp\tau$ топологических типов связных неприводимо-диадических бикомпактов веса τ.

Следствие 2. *Для любого кардинала* $\tau \geqslant \aleph_1$ *существует ровно* $\exp\tau$ *алгебраических типов плотных* (*в смысле* ([3])) *подалгебр свободной булевой алгебры мощности* τ.

Следствие 3. *Для любого кардинала* $\tau \geqslant \aleph_0$ *существует ровно* $\exp\tau$ *алгебраических типов подалгебр вида* $C(X)$ *банаховой алгебры* $C(D^\tau)$.

Заметим, что в случаях (III) и (IV) мы доказали лишь существование «большого» множества топологических типов данного веса или плотности. Было бы интересно с помощью ординалов «построить» элементы этого множества, как это сделано в (I) и (II). Вот другие вопросы, на которые авторы не нашли ответов:

1) Сколько существует топологических типов локально связных диадических бикомпактов веса τ?

2) Сколько существует топологических типов открытых подмножеств D^τ, $\tau \geqslant \aleph_1$? (Заметим, что в случае $\tau = \aleph_0$ существует два типа ([7]), несмотря на то, что существует $\exp\aleph_0$ топологических типов замкнутых подмножеств).

3) Сколько существует типов непрерывности (([1]), т. 1) диадических бикомпактов веса τ?

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966; 2, М., 1969. [2] S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński, Fundam. Math., 1, 17 (1920). [3] Р. Сикорский, Булевы алгебры, М., 1969. [4] А. А. Марков, Сборн. Математика в СССР за 30 лет, М., 1948, стр. 183. [5] И. И. Паровиченко, ДАН, 115, № 5, 866 (1957). [6] Дж. Келли, Общая топология, М., 1968. [7] M. Reichbach, Proc. Am. Math. Soc., 13, № 1, 17 (1962). [8] Б. А. Ефимов, Тр. Московск. матем. общ., 14, 211 (1965). [9] В. И. Пономарев, Fundam. math., 52, 351 (1963). [10] R. Engelking, Qutline of General Topology, Amsterdam, 1968. [11] R. Engelking, Fundam. Math., 57, № 3, 287 (1965).