

УДК 519.4:517:513.88

МАТЕМАТИКА

А. В. ЗАФИЕВСКИЙ

О ПОЛУГРУППАХ, ИМЕЮЩИХ СУММИРУЕМЫЕ СО СТЕПЕННЫМ
ВЕСОМ ОСОБЕННОСТИ В НУЛЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 IV 1970)

Как известно, полугруппы линейных непрерывных операторов, сильно непрерывные лишь при $t > 0$, могут иметь любой рост при $t \rightarrow 0$. В этой заметке делается попытка распространить некоторые результаты теории полугрупп класса C_0 на классы $L^{(\alpha)}$ полугрупп $T(t)$, сильно непрерывных при $t > 0$, для которых функции $t^\alpha \|T(t)x\|$ ($x \in X$) имеют суммируемые в нуле особенности. Полугруппы такого типа были впервые рассмотрены Да Прато ⁽²⁾. Именно, он рассматривал полугруппы $T(t)$, удовлетворяющие оценке $t^\alpha \|T(t)\| \leq C$ при некотором целом α . Результаты настоящей статьи позволяют провести более тонкую классификацию полугрупп, учитывая такую случай дробного показателя α . Кроме того, полученные результаты позволяют рассмотреть кроме полугрупп, для которых функции $t^\alpha \|T(t)x\|$ ($x \in X$) ограничены, также и полугруппы, для которых функции $t^\alpha \|T(t)x\|$ суммируемы. Основным результатом заметки является установление соответствия между полугруппами класса $L^{(\alpha)}$ и их инфинитезимальными операторами.

1. Допустим, что $T(t)$ — сильно непрерывная при $t > 0$ полугруппа линейных непрерывных операторов в банаховом пространстве X , ω_0 — ее тип, A_0 — ее инфинитезимальный оператор, т. е. оператор, определенный равенством

$$A_0 x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad (1)$$

на множестве $D(A_0)$ всех тех $x \in X$, для которых предел (1) существует. Введем обозначения

$$N_0 = \bigcap_{t > 0} \{x: T(t)x = 0\}; \quad X_0 = \overline{\bigcup_{t > 0} \{T(t)x: x \in X\}}.$$

Теорема 1. Пусть $N_0 \cap X_0 = \{0\}$. Тогда инфинитезимальный оператор A_0 допускает замыкание.

Одно из замкнутых продолжений оператора A_0 можно задать следующим образом. Определим $D(B)$ как совокупность всех $x \in X$, для которых найдется такой $z \in X_0$, что при любых t и s , $0 < s < t$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)z d\tau.$$

Если выполнены условия теоремы 1, то элемент z по элементу x определяется однозначно. Поэтому равенство $Bx = z$ определяет некоторый оператор B . Этот оператор замкнут и является продолжением оператора A_0 .

Введем, далее, оператор $R(\lambda)$, определенный при $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ формулой

$$R(\lambda)x = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \quad (2)$$

на множестве D_R всех тех $x \in X$, для которых предел (2) существует при любых λ , $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$.

Л е м м а 1. Оператор $R(\lambda)$ переводит D_R в D_R при любом λ . Кроме того, справедливы соотношения:

- а) $R(\lambda)x - R(\mu)x = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)x \quad (x \in D_R)$;
 б) $(\lambda I - A_0)R(\lambda)x = x$, если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds = x;$$

- в) $R(\lambda)(\lambda I - A_0)x = x \quad (x \in D(A_0))$;
 г) $R(\lambda)(\lambda I - B)x = x$, если $x \in D(B)$ и $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$;
 д) $(\lambda I - B)R(\lambda)x = x \quad (x \in D_R \cap X_0)$.

Л е м м а 2. Если $x \in D_R$, то для любого целого неотрицательного m справедливо равенство

$$R^{m+1}(\lambda)x = \frac{1}{m!} \int_0^\infty t^m e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (3)$$

Заметим, что в отличие от случая полугруппы класса L (3) оператор $R(\lambda)$ не обязательно ограничен.

Будем говорить, что полугруппа $T(t)$ принадлежит классу $L^{(n)}$, если $N_0 = \{0\}$, $X_0 = X$ и если для любого $x \in X$ функция $t^n \|T(t)x\|$ суммируема на любом промежутке вида $(0, a)$, $a < \infty$.

Л е м м а 3. Пусть $T(t)$ — полугруппа класса $L^{(n)}$. Тогда оператор $S_n(\lambda)$, определенный на X формулой

$$S_n(\lambda)x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > \omega_0), \quad (4)$$

непрерывен при $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$, причем при любом $\omega > \omega_0$ справедлива оценка $\|S_n(\lambda)\| \leq M_\omega (\operatorname{Re} \lambda > \omega)$.

Сравнение формул (3) и (4) показывает, что для полугрупп класса $L^{(n)}$ оператор $R^{n+1}(\lambda)$, определенный на D_R , ограничен, и оператор $S_n(\lambda)$ является его продолжением по непрерывности на все X .

При любом $x \in X$ функция $S_n(\lambda)x$ является преобразованием Лапласа от непрерывной при $t > 0$ функции $t^n (n!)^{-1} T(t)x$. Поэтому применимы обычные теоремы о преобразовании Лапласа, в частности теорема единственности. В случае полугруппы класса $L^{(n)}$ — из нее вытекает, что $S_n(\lambda)x = 0$ ($\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$) тогда и только тогда, когда $x = 0$. То же можно сказать и об $R(\lambda)$: $R(\lambda)x = 0$ ($x \in D_R$) тогда и только тогда, когда $x = 0$.

2. Пусть A — допускающий замыкание оператор, причем $D(A^m)$ плотно в X при любом m . Определенную в некоторой области $\rho_n(A)$ комплексной плоскости аналитическую функцию $S_n(\lambda, A)$ со значениями в пространстве линейных непрерывных операторов назовем резольвентой порядка n оператора A , если из $S_n(\lambda, A)x = 0$ ($\lambda \in \rho_n(A)$) следует $x = 0$ и если при $\lambda \in \rho_n(A)$

$$\begin{aligned} S_n(\lambda, A)Ax &= AS_n(\lambda, A)x \quad (x \in D(A)); \\ S_n(\lambda, A)(\lambda I - A)^{n+1}x &= x \quad (x \in D(A^{n+1})). \end{aligned} \quad (5)$$

Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $L_\omega^{(n)}$, если $\rho_n(A) \ni \{\lambda: \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$, причем $\|S_n(\lambda, A)\| \leq M (\operatorname{Re} \lambda > \omega)$, и если существуют такие неотрицательная и непрерывная по совокупности переменных функция $\varphi(t, x)$ ($x \in X$, $t > 0$) и неотрицательная ограниченная на любом промежутке вида (a, b) , $0 < a < b$ функция $\varphi(t)$, ($t > 0$), для которой

$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \varphi(t) < \omega$, что

$$\varphi(t, x) \leq \varphi(t) \|x\|; \quad \int_0^{\infty} t^n \varphi(t, x) e^{-\omega t} dt < \infty, \quad (6)$$

$$\|S_n^{(m)}(\tau, A)x\| \leq \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\tau t} t^{n+m} \varphi(t) dt \quad (\tau > \omega, m = 0, 1, \dots). \quad (7)$$

Теорема 2. Инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы $T(t)$ класса $L^{(n)}$ принадлежит классу $L_{\omega}^{(n)}$ при любом $\omega > \omega_0$ и $S_n(\lambda, A_0) = S_n(\lambda)$ ($\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$).

Теорема 3. Если A — оператор класса $L_{\omega}^{(n)}$, то существует единственная полугруппа $T(t)$ класса $L^{(n)}$, инфинитезимальный оператор A_0 которой удовлетворяет соотношению $S_n(\lambda, A_0) = S_n(\lambda, A)$. При этом $\omega_0 \leq \omega$, $\|T(t)x\| \leq \varphi(t, x)$ и $\|T(t)\| \leq \varphi(t)$.

Пусть оператор A имеет при $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega$ резольвенту $S_n(\lambda, A)$ порядка n и пусть существует семейство $\{T(t): t > 0\}$ линейных непрерывных операторов, сильно непрерывное по t , причем

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-\omega_1 t} \|T(t)x\| dt < \infty$$

при некоторых n и ω_1 и при любом x . Пусть, кроме того,

$$S_n(\lambda, A)x = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > \max(\omega, \omega_1)).$$

Тогда из теоремы 3 вытекает, что $T(t)$ — полугруппа класса $L^{(n)}$.

Если мы зафиксируем функции $\varphi(t, x)$ и $\varphi(t)$, то оценки (7) дадут нам необходимое и достаточное условие того, что функции $S_n(\tau, A)$ соответствует полугруппа $T(t)$, удовлетворяющая оценкам $\|T(t)x\| \leq \varphi(t, x)$ и $\|T(t)\| \leq \varphi(t)$. Выбирая различные функции $\varphi(t, x)$ и $\varphi(t)$, мы будем получать условия принадлежности полугруппы к тому или иному классу полугрупп. В случае $n = 0$ этот путь детально рассмотрен в (3).

Теорему 3 естественно дополнить следующим утверждением.

Теорема 4. Пусть замкнутый оператор A принадлежит классу $L_{\omega}^{(n)}$ и имеет резольвенту $R(\lambda, A)$ при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Тогда замыкание $\bar{A}_0$ оператора A_0 совпадает с оператором A и $S_n(\lambda, A) = R^{n+1}(\lambda, A)$.

3. Будем называть полугруппу $T(t)$ класса $L^{(n)}$ полугруппой класса $L_{\omega}^{(n)}$, если функция $t^n \|T(t)\|$ суммируема на любом промежутке вида $(0, a)$, $a < \infty$. Очевидно, если $T(t)$ — полугруппа класса $L_{\omega}^{(n)}$, то справедливы оценки

$$\|S_n^{(m)}(\lambda)\| \leq \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+m} e^{-t \operatorname{Re} \lambda} \|T(t)\| dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+m} e^{-t \operatorname{Re} \lambda} \varphi(t) dt,$$

если $\|T(t)\| \leq \varphi(t)$ и функция $t^n \varphi(t) e^{-\omega t}$ суммируема на $(0, \infty)$. Справедливо и обратное утверждение:

Теорема 5. Пусть оператор A имеет резольвенту $S_n(\lambda, A)$ порядка n при действительных $\tau > \omega$ и пусть выполнены оценки

$$\|S_n^{(m)}(\tau, A)\| \leq \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+m} e^{-\tau t} \varphi(t) dt \quad (\tau > \omega, m = 0, 1, \dots), \quad (8)$$

где функция $\varphi(t)$ неотрицательна и $t^\alpha \varphi(t)e^{-\omega t}$ суммируема на $(0, \infty)$. Тогда существует полугруппа $T(t)$ класса $L_0^{(n)}$, для которой $S_n(\tau) = S_n(\tau, A)$ при $\tau > 0$.

4. В качестве приложения рассмотрим полугруппы $T(t)$ с $N_0 = \{0\}$ и $X_0 = X$, удовлетворяющие оценке $\|T(t)\| \leq Ct^{-\alpha}e^{\omega t}$. Назовем эти полугруппы полугруппами класса C_α . Они принадлежат классам $L_0^{(n)}$ при $n \geq [\alpha]$. Оценки (8) приобретают для них более простой вид.

Теорема 6. Пусть $T(t)$ — полугруппа класса C_α . Тогда ее инфинитезимальный оператор A_0 имеет при $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ резольвенту $S_n(\lambda, A_0)$ порядка n ($n \geq [\alpha]$) и

$$\|S_n^{(m)}(\lambda, A_0)\| \leq \frac{C\Gamma(m+n+1-\alpha)}{n!(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{m+n+1-\alpha}} \quad (\operatorname{Re} \lambda > \omega, m = 0, 1, \dots). \quad (9)$$

Обратно, пусть оператор A имеет при действительных $\tau > \omega$ резольвенту $S_n(\tau, A)$ порядка n и справедлива оценка

$$\|S_n^{(m)}(\tau, A)\| \leq \frac{C\Gamma(m+n+1-\alpha)}{n!(\tau - \omega)^{m+n+1-\alpha}} \quad (\tau > \omega, m = 0, 1, \dots). \quad (10)$$

Тогда существует единственная полугруппа $T(t)$ класса $L_0^{(n)}$, удовлетворяющая оценке $\|T(t)\| \leq Ct^{-\alpha}e^{\omega t}$, для которой

$$S_n(\tau, A)x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\tau t} T(t)x dt.$$

Теорема 6 является обобщением теоремы Да Прато ⁽²⁾ на случай дробного α . Другая теорема подобного рода для полугрупп, удовлетворяющих оценке $\|T(t)\| \leq Ct^{-\alpha}e^{\omega t}$, доказана П. Е. Соболевским ⁽⁴⁾.

Автор приносит благодарность П. П. Забрейко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
6 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.
² G. Da Prato, C. R., AB 262, № 18, A 996 (1966). ³ П. П. Забрейко, А. В. Зафиевский, ДАН, 189, № 5 (1969). ⁴ П. Е. Соболевский, Функциональный анализ и его приложения, 5, в. 2 (1970).