Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 517.43 *МАТЕМАТИКА*

В. Б. КОРОТКОВ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 V 1970)

1°. Пусть E — вещественное B-пространство, $S(a, b)$ — пространство измеримых функций. В 1938 г. Л. В. Канторовичем и Б. З. Вулихом [1] был введен и изучен класс операторов, действующих из E в $S(a, b)$ и имеющих вид

$$(T(x)(s) = (x, \varphi(s)), \quad x \in E, \tag{1}$$

где $\varphi(s)$ — функция * со значениями в сопряженном пространстве E^*.

Для сепарабельных или рефлексивных B-пространств E Л. В. Канторович и Б. З. Вулих показали, что оператор T: $E \to S(a, b)$ имеет вид (1) тогда и только тогда, когда T является bo-линейным операторм [1].

Операторы вида (1) являются обобщением интегральных операторов: если E и E^* — пространства измеримых функций и $(x, x^*) = \int x(t)\, x^*(t)\, dt$, то (1) имеет вид

$$(Tx)(s) = \int K(s, t)\, x(t)\, dt, \quad x \in E, \tag{2}$$

где ядро $K(s, t) = \varphi(s)$ измеримо по t для почти всех $s \in (a, b)$ и удовлетворяет условию $K(s, \cdot) \in E^*$, $s \in (a, b)$.

Известно [1-3], что при дополнительных ограничениях на E и оператор T ядро в (2) является измеримым по совокупности переменных; в [1,2] было показано, что если оператор T bo-линеен из $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$, то ядро в (2) измеримо по совокупности переменных и, кроме того, удовлетворяет условию $\| \| K(s, t) \|_{p'} \|_q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$.

В работе [3] этот результат был обобщен на случай bo-линейных операторов из $X(0, 1)$ в $Y(0, 1)$, где $X(0, 1)$, $Y(0, 1)$ — пространства измеримых функций, принадлежащие соответственно классам P и $P \cup Q$, введенным Д. А. Владимировым [3].

Следует отметить, что доказательства приведенных из [1-3] предложений существенно опираются на сепарабельность пространства, из которого действует оператор.

Трудности, возникающие при реализации функции $\varphi(s)$ в виде измеримого по совокупности переменных ядра, и связанные с ними ограничения на пространства и операторы вызываются тем, что функция $\varphi(s)$ в (1) является слабо измеримой. Эти трудности в значительной мере исчезают, если функция $\varphi(s)$ сильно измерима [4, 5].

В связи с этим возникает задача об условиях представимости оператора в виде (1) с сильно измеримой функцией $\varphi(s)$. Ниже приводится решение этой задачи для операторов, действующих из произвольного нормированного пространства (вещественного или комплексного) в пространство $S(X, \mu)$, где (X, μ) — произвольное пространство с σ-конечной мерой. Далее указывается широкий класс пространств $F(Y, \nu)$ ν-измеримых функций ((Y, ν) — произвольное пространство с σ-конечной мерой), обладающих тем свойством, что сильно измеримые функции $\varphi(s)$ со значениями в этих пространствах порождают равенством $\varphi(s) = K(s, \cdot)$ измеримые по совокупности переменных ядра, и приводятся предложения об

* Из (1) следует, что функция $\varphi(s)$ слабо измерима.

интегральной представимости линейных операторов, действующих из нормированных пространств измеримых функций в пространства измеримых функций.

2°. Пусть E — нормированное пространство (вещественное или комплексное), L — линейное многообразие в E, (X, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Линейный оператор T: $L \to S(X, \mu)$ назовем C-оператором, если $(Tx)(s) = (x, \varphi(s))$, $x \in L$, где $\varphi(s)$: $X \to E^*$ сильно μ-измеримая функция, которую мы будем называть ядром оператора T. В дальнейшем мы будем предполагать, что замыкание L имеет в E топологическое дополнение ([6]).

Назовем множество $H \subset L^\infty(X, \mu)$ σ-слабо компактным, если существует не более чем счетное множество дизъюнктных множеств X_n, $n \in I$ таких, что $\mu(X_n) < \infty$, $\mu(X \setminus \bigcup_{n \in I} X_n) = 0$ и множества $P_n(H)$, $n \in I$, слабо компактны в $L^\infty(X, \mu)$, где $P_n f = \chi_{X_n} f$, χ_{X_n} — характеристическая функция множества X_n.

Линейный ограниченный оператор Q: $L \to L^\infty(X, \mu)$ назовем σ-слабо вполне непрерывным, если для любого ограниченного множества $G \subset L$ множество $Q(G)$ σ-слабо компактно в $L^\infty(X, \mu)$.

Теорема 1. *Линейный оператор T: $L \to S(X, \mu)$ является C-оператором тогда и только тогда, когда существует функция $\Lambda \in S(X, \mu)$, $\Lambda > 0$, такая, что оператор $(\tau x)(s) = (Tx)(s) / \Lambda(s)$, $x \in L$, является σ-слабо вполне непрерывным оператором из L в $L^\infty(X, \mu)$.*

Замечание. Если L всюду плотно в E, то ядро оператора T определяется однозначно с точностью до μ-эквивалентности.

Следствие. *Пусть $E = H$, где H — гильбертово пространство. Оператор $T: H \to L_2(X, \mu)$ является оператором Гильберта — Шмидта ([7]) тогда и только тогда, когда оператор T имеет мажоранту ([8]), принадлежащую $L_2(X, \mu)$.*

В случае, когда H и $L_2(X, \mu)$ сепарабельны, следствие совпадает с предложением 2.10 ([9]).

Теорема 2. *Пусть E рефлексивно, T: $L \to S(X, \mu)$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны: 1) T имеет абстрактную норму ([2]); 2) T имеет мажоранту ([8]); 3) T является C-оператором; 4) T имеет вид $(Tx)(s) = (x, \varphi(s))$, где φ слабо μ-измерима; T — bo-линейный оператор, т. е. отображает нуль-последовательности из L в сходящиеся μ-почти всюду к нулю последовательности.*

3°. *Пусть* (Y, Ξ, ν) — пространство с σ-конечной мерой, $F(Y, \nu)$ — нормированное пространство ν-измеримых функций *. Будем говорить, что $F(Y, \nu)$ σ-вложено в $L_1(Y, \nu)$, если существует не более чем счетное множество дизъюнктных множеств Y_n, $n \in I$, таких, что $\mu(Y_n) < \infty$, $\mu(Y \setminus \bigcup_{n \in I} Y_n) = 0$ и $\|P_n f\|_{L_1(Y, \nu)} \leqslant c_n \|f\|_{F(Y, \nu)}$, где $P_n f = \chi_{Y_n} f$ и c_n не зависит от f.

Лемма. *Пусть $\varphi(s)$: $X \to F(Y, \nu)$ — сильно μ-измеримая функция и* $F(Y, \nu)$ σ-вложено в $L_1(Y, \nu)$. *Тогда существует $(\mu \times \nu)$-измеримая функция $K(s, t)$ такая, что $\varphi(s) = K(s, \cdot)$.*

Теорема 3. *Пусть $G(Y, \nu)$, $[G(Y, \nu)]^*$ — пространства ν-измеримых функций и* $(x, x^*) = \int\limits_Y x(t) \overline{x^*(t)}\, d\nu(t)$, $x \in G(Y, \nu)$, $x^* \in [G(Y, \nu)]^*$, $[G(Y, \nu)]_*$ *σ-вложено в $L_1(Y, \nu)$, L — линейное многообразие в $G(Y, \nu)$. Если оператор T: $L \to S(X, \mu)$ является C-оператором, то оператор T является интегральным оператором с $(\mu \times \nu)$-измеримым ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условию $\|K(s, \cdot)\|_{[G(Y, \nu)]^*} \in S(X, \mu)$.*

* Под пространством $Z(Y, \nu)$ измеримых функций здесь и далее в статье понимается пространство классов f ν-эквивалентных функций, удовлетворяющих условиям: a) если $f \in Z(Y, \nu)$, то и $|f| \in Z(Y, \nu)$, причем $\|f\|_Z = \||f|\|_Z$; b) если $f \in Z$ и $|g| \leqslant |f|$, $g \in S(Y, \nu)$, то $g \in Z$ и $\|g\|_Z \leqslant \|f\|_Z$.

4°. Теорема 4. *Пусть* 1) $H(Y, \nu)$, $G(Y, \nu)$, $F(X, \mu)$ — *нормированные пространства измеримых функций;* 2) $L = H(Y, \nu) \cap G(Y, \nu)$ *всюду плотно в* $H(Y, \nu)$ *и* $G(Y, \nu)$; 3) $G(Y, \nu)$ *удовлетворяет условиям предыдущей теоремы* 3 *и рефлексивно;* 4) $H(Y, \nu)$ — *банахово пространство;* 5) T: $H(Y, \nu) \to F(X, \mu)$ — *регулярный оператор. Для того чтобы оператор* T *был интегральным оператором с* $(\mu \times \nu)$-*измеримым ядром, удовлетворяющим условию* $\|K(s, \cdot)\|_{[G(Y,\nu)]^*} \in S(X, \mu)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\Lambda \in S(X, \mu)$ *такая, что для всех* $f \in L$ $|(Tf)(s)| \leqslant \Lambda(s)\|f\|_{G(Y,\nu)}$ *для* μ-*почти всех* $s \in X$.

5°. Результаты, полученные в ([8, 9]) для операторов в сепарабельных пространствах, можно распространить на несепарабельный случай. Так, утверждения 1), 3) теорем 1—5 ([8]) остаются справедливыми и в случае, когда μ, μ_0 не сепарабельные * σ-конечные меры. Утверждения 2) теорем 1—5 ([8]) формулируются с учетом сепарабельности области значений операторов типа (SC). Приведем, например, аналоги утверждений 2) теорем 1, 2 ([8]).

Теорема 5. *Пусть мера* μ σ-*конечна и не является чисто атомической. Оператор* T *является оператором типа* (SC) *тогда и только тогда, когда сопряженный оператор* T^* *плотно определен, предельный спектр оператора* T^* *содержит* 0 *и область значений замыкания оператора* T *сепарабельна.*

Теорема 6. *Пусть мера* μ σ-*конечна и не является чисто атомической. Оператор* T *является оператором типа* (C) *тогда и только тогда, когда сопряженный оператор* T^* *плотно определен и существует симметрический оператор* A *такой, что* $A \subseteq T^*$, *предельный спектр оператора* A *содержит* 0 *и область значений сопряженного оператора* A^* *сепарабельна.*

6°. Теорема 7. *Оператор* T: $L_2(Y, \nu) \to L_2(X, \mu)$ *является интегральным оператором с* $(\mu \times \nu)$-*измеримым ядром Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда существует мажоранта* ([8]) *оператора* T, *принадлежащая* $L_2(X, \mu)$.

В случае $X = Y = (a, b)$, $\mu = \nu$ — мера Лебега, теорема следует из одной теоремы Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха (([2]) стр. 332, см. также ([3]), стр. 773).

Следствие 1. *Пусть* A: $L_2(Z, \xi) \to L_2(Y, \nu)$ *и* B: $L_2(X, \mu) \to L_2(W, \eta)$ — *линейные ограниченные операторы,* T: $L_2(Y, \nu) \to L_2(X, \mu)$ — *интегральный оператор с* $(\mu \times \nu)$-*измеримым ядром Гильберта — Шмидта. Тогда* BTA — *интегральный оператор с* $(\eta \times \xi)$-*измеримым ядром Гильберта — Шмидта.*

Следствие 2. *Оператор* T: $L_2(Y, \nu) \to L_2(X, \mu)$ *является оператором Гильберта — Шмидта* ([7]) *тогда и только тогда, когда оператор* T *является интегральным оператором с* $(\mu \times \nu)$-*измеримым ядром Гильберта — Шмидта.*

В сепарабельном случае утверждение следствия хорошо известно (([4]), стр. 102).

7°. Результаты настоящей статьи можно распространить на случай, когда X — отделимое локально компактное пространство, μ — мера Радона.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, Comp. Math., 5, 119 (1938). [2] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. [3] Д. А. Владимиров, Сибирск. матем. журн., 8, 4, 764 (1967). [4] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966. [5] В. Б. Коротков, Сибирск. матем. журн., 11, 1, 103 (1970). [6] Р. Эдвардс, Функциональный анализ. Теория и приложения, М., 1969. [7] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы. Спектральная теория, М., 1966. [8] В. Б. Коротков, ДАН, 190, № 6, 1274 (1970). [9] J. Weidmann, Manuscripta Math., 2, 1, 1 (1970).

* Т. е. $L_2(X, \mu)$, $L_2(X_0, \mu_0)$ не сепарабельны.