Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

В. Б. ЛИДСКИЙ, Н. В. ХАРЬКОВА

СПЕКТР СИСТЕМЫ БЕЗМОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 18 III 1970)

1. Система уравнений осесимметричных колебаний оболочки вращения имеет вид

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B(s)}\frac{dB(s)u}{ds}\right)-\frac{1-\sigma}{R_1(s)R_2(s)}u+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{dw}{ds}+$$
$$+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w=\lambda u, \tag{1}$$

$$\frac{h^2}{12}\frac{1}{B}\frac{d}{ds}\left[B\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B}\frac{d}{ds}\left(B\frac{dw}{ds}\right)\right)\right]-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds}-$$
$$-\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{B_s'}{B}u+\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)w=\lambda w. \tag{1'}$$

Здесь s — длина дуги меридиана $a\leqslant s\leqslant b$; $B(s)$ — абсцисса меридиана срединной поверхности, $R_1^{-1}(s)$ и $R_2^{-1}(s)$ — главные кривизны поверхности вращения:

$$R_1^{-1}(s)=-B_{ss}''(1-B_s'^2)^{-1/2};\quad R_2^{-1}(s)=(1-B_s'^2)^{1/2}B^{-1}; \tag{2}$$

σ — коэффициент Пуассона; λ — спектральный параметр, равный $(1-\sigma^2)p^2\rho E^{-1}$, где ρ — плотность, E — модуль Юнга, p — частота колебания.

Функции $u(s)$ и $w(s)$ — компоненты вектора смещения вдоль меридиана и по нормали к поверхности; h — малый параметр.

В случае жесткого защемления краев оболочки граничные условия имеют вид

$$u(a)=u(b)=w(a)=w(b)=w_s'(a)=w_s'(b)=0 \tag{3}$$

(см. по этому поводу [1, 2, 5]).

Для отыскания нулевых приближений частот задачи (1), (3) по малому параметру h полагают в (1′) $h=0$. Так возникающую систему дифференциальных уравнений второго порядка мы сокращенно запишем в виде

$$L_0f=\lambda f, \tag{4}$$

где $f(s)=(u(s),w(s))$ — вектор-функция, и изучим спектр системы (4) при граничных условиях

$$u(a)=u(b)=0. \tag{4'}$$

Можно показать, что оператор L_0 в пространстве гладких вектор-функций $f(s)$, удовлетворяющих граничным условиям (4′), является симметрическим и положительно определенным. Предполагается, что скалярное произведение введено по формуле

$$(f_1,f_2)=\int_a^b B(s)\left(u_1(s)\bar u_2(s)+w_1(s)\bar w_2(s)\right)ds. \tag{5}$$

Замыкание этого оператора * мы будем обозначать L_0.

2. Перепишем систему (3) в понятных обозначениях

$$L_{11}u + L_{12}w = \lambda u, \tag{6}$$

$$L_{21}u + L_{22}w = \lambda w \tag{6'}$$

и введем функции

$$\varphi_1(s) = \frac{1-\sigma^2}{R_2^2(s)}; \quad \varphi_2(s) = \frac{1}{R_1^2(s)} + \frac{2\sigma}{R_1(s)R_2(s)} + \frac{1}{R_2^2(s)}. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что $\varphi_2(s) \geqslant \varphi_1(s)$ $(s \in [a, b])$. Обозначим еще множество значений функции $\varphi_1(s)$ через $[\alpha, \beta]$, а функции $\varphi_2(s)$ — через $[\gamma, \delta]$. В дальнейшем мы будем считать, что функция $B(s)$ (абсцисса меридиана) является достаточно гладкой и положительной.

Нам понадобятся следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть $s_0 \in [a, b]$ и $\lambda \overline{\in} [\alpha, \beta]$ и $\lambda \neq \varphi_2(s_0)$. Пусть r_1 и r_2 — произвольные вещественные числа. Тогда существует и единственное решение системы* (4) $f(s, \lambda) = (u(s, \lambda), w(s, \lambda))$, *удовлетворяющее условиям Коши*

$$u(s_0, \lambda) = r_1, \quad u'_s(s_0, \lambda) = r_2. \tag{8}$$

Вектор-функция $f(s, \lambda)$ при любом $s \in [a, b]$ регулярна во всей λ-плоскости с выброшенным отрезком $[\alpha, \beta]$ и точкой $\lambda = \varphi_2(s_0)$, в которой имеет простой полюс.

Лемма 1 доказывается сведением задачи Коши к уравнению Вольтерра

$$(\varphi_1(s) - \lambda)\, w(s, \lambda) + \int_{s_0}^{s} K(s, t, \lambda)\, w(t, \lambda)\, dt = \tau(s, \lambda), \tag{9}$$

в котором $K(s, t, \lambda)$ — целая функция λ, а $\tau(s, \lambda)$ имеет полюс при $\lambda = \varphi_2(s_0)$.

Лемма 2. *На резольвентном множестве оператора L_{11} ** спектр задачи* (4), (4′) *совпадает со спектром уравнения*

$$(\varphi_1(s) - \lambda)\, w + T(\lambda)\, w = T_1(\lambda)\, h_1 + h_2, \tag{10}$$

где $T(\lambda)$ и $T_1(\lambda)$ — мероморфные вполне непрерывные операторы с полюсами в точках спектра оператора L_{11}; $h_1(s)$ и $h_2(s)$ — произвольные функции из $\mathscr{L}_2(a, b)$.

С использованием лемм 1 и 2 доказывается следующая

Теорема 1. *Спектр задачи* (4), (4′) *при $\lambda \overline{\in} [\alpha, \beta]$ дискретен (состоит из изолированных собственных значений конечной кратности). Собственные значения имеют точку сгущения $\lambda = +\infty$ и, быть может, точки $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$. Весь отрезок $[\alpha, \beta]$ принадлежит спектру оператора L_0. Все собственные значения, не принадлежащие отрезкам $[\alpha, \beta]$ и $[\gamma, \delta]$,— простые; собственные значения, принадлежащие отрезку $[\gamma, \delta]$, не более чем двукратны.*

2. Мы сейчас покажем, что для собственных функций $f_k(s) = (u_k(s), w_k(s))$ задачи (4), (4′) справедливы осцилляционные теоремы.

В основе лежит следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть $\lambda \overline{\in} [\alpha, \beta]$, $\lambda \overline{\in} [\gamma, \delta]$. Пусть $f_0(s, \lambda) = (u_0(s, \lambda), w_0(s, \lambda))$ — решение системы* (4), *удовлетворяющее условию $u_0(a, \lambda) = 0$,*

---

* Легко показать, что оператор L_0 определенный на многообразии гладких вектор-функций, удовлетворяющих условиям (4′), существенно самосопряженный.

** Оператор L_{11} определяется формулой $L_{11}u = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B}\frac{dBu}{ds}\right) - \frac{1-\sigma}{R_1R_2}u$ и действует на скалярные функции $u(s)$, удовлетворяющие условию (4′). Спектр L_{11}, как хорошо известно, вещественен и дискретен. Резольвентным множеством называется дополнение к спектру.

$u_0'(a, \lambda) = 1$. *Пусть* $s_0(\lambda)$ — *нуль функции* $u_0(s, \lambda)$, *принадлежащий интервалу* (a, b). *Тогда справедлива формула*

$$\frac{ds_0}{d\lambda} = -\frac{\lambda - \varphi_2(s_0)}{\lambda - \varphi_1(s_0)} \left(\frac{\partial u_0(s_0)}{\partial s} \right)^{-2} \left(\int_a^{s_0} B(u_0^2 + w_0^2)\, ds \right) B^{-1}(s_0), \qquad (11)$$

и, следовательно, при $\lambda < \alpha$ *и* $\lambda > \delta$ *все нули функции* $u_0(s, \lambda)$ *с увеличением* λ *смещаются влево, а при* $\beta < \lambda < \gamma$ — *вправо.*

Условимся собственные значения, принадлежащие интервалу $(0, \alpha)$, называть первой серией, интервалу (β, γ) — второй серией, отрезку $[\gamma, \delta]$ — третьей серией и, наконец, собственные значения, принадлежащие интервалу $(\delta, +\infty)$,— четвертой серией. Заметим, что, согласно теореме 1, четвертая серия бесконечна, третья конечна, а первая и вторая могут быть конечными или бесконечными *. Внутри каждой серии перенумеруем собственные значения в порядке возрастания.

Пусть $n_1(\lambda)$ — число нулей функции $u_0(s, \lambda)$ при $s \in (a, b)$, когда $\lambda < \alpha$ и пусть

$$N_1 = \sup_{\lambda < \alpha} n_1(\lambda) \quad (N_1 \leqslant +\infty). \qquad (12)$$

Теорема 2 позволяет сделать следующее заключение:

Следствие 1. *Первая серия состоит из* N_1 *собственных значений* $\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda_k^{(1)}, \ldots$, *причем компонента* $u_0(s, \lambda_k^{(1)})$, *соответствующая собственной функции, имеет внутри интервала* (a, b) *ровно* k *нулей.*

Аналогичные утверждения справедливы для второй и четвертой серий. В частности, первая компонента k-й собственной функции четвертой серии имеет на интервале (a, b) $k + M_3$ нулей, где $M_3 = \inf\limits_{\lambda > \delta} n_3(\lambda)$ и $n_3(\lambda)$ — число нулей $u_0(s, \lambda)$ при $\lambda > \delta$. Заметим, что собственные функции третьей серии могут иметь любое число нулей.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (4) *функции* $1 / R_1(s) + \sigma / R_2(s)$ (см. (1)) *сохраняет знак на отрезке* $[a, b]$. *Тогда между соседними двумя нулями компоненты* $u(s, \lambda_k^{(i)})$ *собственной функции* $f_k^{(i)}(s)$ *первой, второй и четвертой серий лежит строго один нуль компоненты* $w(s, \lambda_k^{(i)})$, $i = 1, 2, 4$. *Таким образом, нули компонент собственных функций* $f_k^{(i)}(s)$ *строго перемежаются.*

4. Приведем теперь достаточное условие, при котором первая серия частот (наинизшая) бесконечна.

Теорема 4. *Пусть в окрестности точки* $s = s_0 \in [a, b]$ *функция* $B(s)$ *достигает максимума, так что* $B(s) = B_0 - {}^1/_2 k(s - s_0)^2 + O[(s - s_0)^3]$. *Пусть* $0 \leqslant B_0 k \leqslant 1$ *и локальный минимум, принимаемый* $\varphi_1(s)$ *в точке* s_0, *совпадает с ее инфимумом* $\varphi_1(s_0) = \alpha > 0$. *Тогда при условии*

$$9(kB_0)^2 + (12\sigma - 1)kB_0 + 4\sigma^2 > 0 \qquad (13)$$

первая серия бесконечна. При $\sigma > {}^1/_{24}$ *этому условию удовлетворяют все* kB_0.

Доказательство проводится путем исследования нулей решения $u_0(s, \lambda)$ и опирается на следствие 1 из теоремы 2.

Заметим в заключение, что в случае сферической оболочки первая серия бесконечна (этот факт уже отмечался в литературе, см. ([3], [4])), а в случае конической, вообще говоря, не пуста. Число собственных значений в первой серии можно сделать сколь угодно большим; для этого достаточно взять конус с углом наклона образующей, близким к $\pi / 2$.

---

* Разумеется, первая, вторая и третья серии могут отсутствовать вообще.

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру, по инициативе которого было предпринято это исследование, а также Е. П. Товстику, Г. Н. Чернышеву и Д. И. Цельнику за обсуждение и советы.

Московский физико-технический институт

Институт проблем механики Академии наук СССР Москва

Поступило 16 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, М., 1953. [2] П. Е. Товстик, Исследования по упругости и пластичности, Ленинградск. унив., сборн. № 4, 1965. [3] П. Е. Товстик, Изв. АН СССР, Механика, № 6, 111 (1965). [4] О. В. Лужин, Сборн. Исследования по теории сооружений, в. 10, 1961. [5] Г. И. Пшеничнов, Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок, «Наука», 1966, стр. 641.