Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

АЭРОДИНАМИКА

А. Ф. СИДОРОВ

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ТИПА ТРОЙНОЙ ВОЛНЫ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 18 III 1970)

Переопределенная система уравнений, описывающая потенциальные нестационарные тройные волны в политропном газе [1], имеет вид

$$\Gamma_j = \sum_{i,k} A_{ik}(F) L_{ik}^{(j)}(F, \Pi) = 0, \quad i, k, j = 1, 2, 3; \tag{1}$$

$$L_{ik}^{(1)} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa F_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa F_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa F_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa F_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix},$$

$$L_{ik}^{(2)} = (-1)^{i+k} \left\{ \begin{vmatrix} \varkappa F_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa F_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa \Pi_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa \Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varkappa \Pi_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa \Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa F_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa F_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \right\},$$

$$L_{ik}^{(3)} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa \Pi_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa \Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa \Pi_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa \Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix},$$

$$m, n \neq k, m < n; \qquad p, q \neq i, p < q;$$

$$A_{ik} = \delta_{ik} F - \varkappa^2 F_i F_k, \tag{2}$$

$$F_i = \partial F / \partial u_i, \quad F_{ik} = \partial^2 F / \partial u_i \partial u_k, \quad \Pi_i = \partial \Pi / \partial u_i, \quad \Pi_{ik} = \partial^2 \Pi / \partial u_i \partial u_k.$$

Системе трех уравнений второго порядка (1) удовлетворяют неизвестные функции $F(u_1, u_2, u_3) = c^2$ (c — скорость звука) и $\Pi(u_1, u_2, u_3)$ — функция размещения; δ_{ik} — символ Кронекера, $\varkappa = 1 / (\gamma - 1)$; γ — показатель адиабаты в уравнении состояния $p = a^2 \rho^\gamma$; p — давление; ρ — плотность; $a^2 = \mathrm{const}$, u_i — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$. В случае тройной волны области течения в четырехмерном физическом пространстве x_1, x_2, x_3, t (x_i — пространственные координаты, t — время) соответствует в пространстве неизвестных функций u_1, u_2, u_3, c многообразие размерности 3. u_1, u_2 и u_3 будем считать функционально независимыми. После нахождения F и Π из (1) течение в физическом пространстве восстанавливается по формулам

$$x_i = \varkappa \Pi_i + u_i + t(\varkappa F_i + u_i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

В [2] для случая изотермического газа был найден класс точных решений системы (1), зависящий от 3 функции одного аргумента. Там же было для политропного газа получено автомодельное течение, с помощью которого было построено решение задачи об истечении в вакуум вдоль некоторого двугранного угла. Вопрос о непустоте и физической содержательности класса неавтомодельных тройных волн для $\gamma \neq 1$ оставался открытым. В данной заметке построено семейство точных решений уравнений гидродинамики типа неавтомодельной тройной волны для $2 > \gamma > 1$, зависящее от трех произвольных функций одного аргумента, и исследованы некоторые его приложения и особенности.

п. 1. Будем искать решения системы (1) в виде

$$F = [a_0 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})]^2, \quad |\mathbf{a}|^2 = 3 / 4\varkappa(\varkappa - 1), \quad a_0 = \mathrm{const}, \tag{1.1}$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{3} \left(-\frac{1}{2\varkappa} u_i^2 + T_i [(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{u})] \right), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i})$ — некоторые постоянные линейно независимые векторы. При $T_i \equiv 0$ и F из (1.1) соответствующее автомодельное решение было получено в [2]. При $j = 1$ в (1) уравнения для F независимо и в силу (1.1) выполняется автоматически. Для функции же Π из (1) остается система двух уравнений ($j = 2, 3$). Подставляя Π из (1.2) в эти два уравнения, приведем их к виду

$$\sum_{i=1}^{3} \left(|\boldsymbol{\alpha}_i|^2 - \frac{3-\gamma}{(\gamma-1)^2} |\mathbf{a} \times \boldsymbol{\alpha}_i|^2 \right) T_i'' [\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{u})] = 0,$$
$$\tag{1.3}$$
$$\sum_{i,\,k=1}^{3} \left(|\boldsymbol{\alpha}_i \times \boldsymbol{\alpha}_k|^2 - \frac{4}{(\gamma-1)^2} |\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_i \times \boldsymbol{\alpha}_k)|^2 \right) T_i'' [(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{u})]\, T_k'' [(\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{u})] = 0,$$

где штрихи соответствуют дифференцированию функций T_i по полным аргументам.

Для того чтобы точное решение (1.1), (1.2) зависело от 3 произвольных функций T_1, T_2 и T_3, необходимо и достаточно выполнение условий

$$|\boldsymbol{\alpha}_i \times \boldsymbol{\alpha}_k|^2 - \frac{4}{(\gamma-1)^2} |\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_i \times \boldsymbol{\alpha}_k)|^2 = 0, \tag{1.4}$$

$$|\mathbf{a} \times \boldsymbol{\alpha}_i|^2 = (\gamma - 1)^2 / (3 - \gamma) \tag{1.5}$$

(не умаляя общности, можно положить $|\boldsymbol{\alpha}_i| = 1$).

Из геометрических соображений ясно, что система уравнений (1.4), (1.5) при заданном $\mathbf{a}$ ($|\mathbf{a}|^2 = 3(\gamma - 1)^2 / 4(2 - \gamma)$) будет удовлетворена, лишь когда $\boldsymbol{\alpha}_i$ образуют одинаковые углы между собой и одинаково наклонены к $\mathbf{a}$. Таким образом, можно, например, при $\mathbf{a} = (0, 0, a_3)$ в качестве $\boldsymbol{\alpha}_i$ взять

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\sin\nu, 0, \cos\nu),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \left(-\frac{1}{2}\sin\nu, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\nu, \cos\nu \right), \tag{1.6}$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(-\frac{1}{2}\sin\nu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\nu, \cos\nu \right),$$

где

$$\sin\nu = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2-\gamma}}{\sqrt{3-\gamma}} \quad (2 > \gamma > 1). \tag{1.7}$$

При этом дополнительное условие на объем параллелепипеда, составленного из векторов $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{\alpha}_k$, следующее из (1.4), выполняется автоматически.

Итак, при $\boldsymbol{\alpha}_i$, определенным по (1.6), формулы (1.1), (1.2) порождают точное решение уравнений (1) с произвольными T_i.

Ясно, что если положить $T_3 \equiv 0$ или $T_3 \equiv 0$ и $T_2 \equiv 0$, когда решения (1.1), (1.2) зависят соответственно от двух и одной произвольной функций, при нахождении $\boldsymbol{\alpha}_i$ останется более широкий произвол, чем в случае с $T_i \equiv 0$.

Аналогами решений (1.1), (1.2) в случае плоских нестационарных течений типа двойной волны будут течения, определяемые формулами

$$x_1 = \left[u_1 + \frac{\gamma-1}{2} (a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2) a_1 \right] t + F_1' (u_1 + \beta_1 u_2) + F_2' (u_1 + \beta_2 u_2),$$
$$\tag{1.8}$$
$$x_2 = \left[u_2 + \frac{\gamma-1}{2} (a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2) a_2 \right] t + \beta_1 F_2' (u_1 + \beta_1 u_2) + \beta_2 F_2' (u_1 + \beta_2 u_2),$$

где

$$a_1^2 + a_2^2 = 4/(3-\gamma), \quad 3 > \gamma > 1,$$

$$\beta_1 = (-a_1a_2 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 1}) / (1 - a_1^2),$$

$$\beta_2 = (-a_1a_2 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 1}) / (1 - a_1^2),$$

а функции F_1' и F_2' произвольны.

При $F_1' \equiv F_2' \equiv 0$ такое решение было рассмотрено в [3]. Разумеется, каждый раз при выборе произвольных функций необходимо проверять условия разрешимости уравнений (3) и (1.8) для u_i.

п. 2. Решения (1.1), (1.2) позволяют построить поля течений в некоторых задачах о взаимодействии трех плоских одномерных волн Римана. Одно из таких решений для изотермического газа было исследовано в [2]. В плоском случае задачи о взаимодействии двух волн Римана рассматривались в работах [3–6].

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ политропный однородный газ покоился внутри некоторого трехгранного бесконечного угла, образованного плоскостями P_i, ортогональными соответственно к векторам $\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1 \times \boldsymbol{\alpha}_2$. Плоскости P_i начинают двигаться в газе параллельно самим себе со скоростями $V_i(t)$. Ясно, что вдали от вершины и ребер угла возникнут плоские течения Римана, вдали от вершины вблизи ребер — области взаимодействия двух волн Римана, где течение можно пытаться строить в классе плоских двойных волн, и, наконец, у вершины угла в области взаимодействия двойных волн можно искать решение в классе тройных волн. Правда, при этом [6] не всегда, даже в классе двойных волн, удается построить течение в целом,— приходится вводить некоторые криволинейные подвижные стенки. Однако часть области взаимодействия в классе двойных волн всегда можно построить.

Для рассматриваемого случая, полагая в (1.1), (1.2) для фиксированного $i(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{u}) \equiv 0$, получим течение типа плоской двойной волны (вместо (3) останутся два уравнения, получающиеся составлением соответствующей линейной комбинации); полагая, что в нуль обращаются сразу два таких соотношения, получим плоские волны Римана. Каждый раз, в соответствии с теоремой [7] о примыкании течений различных рангов, плоскости типа $(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{u}) = 0$ или прямые $((\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{u}) = 0,\ (\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{u}) = 0,\ i \neq k)$ в пространстве годографа скоростей u_1, u_2, u_3 будут являться характеристическими многообразиями соответственно для уравнений тройных и двойных волн. Таким образом, в случае, если сохраняется потенциальность течения, можно с помощью (1.1), (1.2) построить решение в некоторой области взаимодействия трех волн Римана (функции T_i определяются по заданным $V_i(t)$).

Возможность восстановления течений в физическом пространстве x_1, x_2, x_3, t зависит от свойства якобиана $J = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(u_1, u_2, u_3)$, который не должен обращаться в нуль в области определения течения в пространстве u_1, u_2, u_3, t. Если J обращается в нуль, в течении появляются предельные многообразия, происходит явление градиентной катастрофы. Представляет интерес выяснить особенности появления предельных многообразий и разрушения потенциальных бегущих волн для класса течений (1.1), (1.2). Такое разрушение неизбежно произойдет в конечный момент времени $t = t^*$, если плоскости P_i вдвигаются в газ, образуя волны сжатия.

Приведя (3) к виду

$$x_i = T_1'\alpha_{i1} + T_2'\alpha_{i2} + T_3'\alpha_{i3} + t\,(2\varkappa\sqrt{F} + u_i), \tag{2.1}$$

вычислим J. Оказывается, что J можно представить в виде

$$J = \frac{\gamma+1}{2(2-\gamma)}\left(t + 2\,\frac{2-\gamma}{3-\gamma}\,T_1''\right)\left(t + 2\,\frac{2-\gamma}{3-\gamma}\,T_2''\right)\left(t + 2\,\frac{2-\gamma}{3-\gamma}\,T_3''\right). \tag{2.2}$$

Аналогичное представление справедливо для якобианов в случае плоских двойных волн, когда в (2.2) остаются две скобки, и в случае волн Римана.

Непосредственно из вида J получаем теорему: явление градиентной катастрофы в классе течений (1.1), (1.2) наступает одновременно вдоль некоторой поверхности в пространстве x_1, x_2, x_3 как в области тройной волны, так и в двух примыкающих к ней областях двойных волн и в одной из волн Римана.

Таким образом, в классе течений (1.1), (1.2) не может произойти локальное разрушение потенциального движения.

Ясно, что результаты и вид точных решений (1.1), (1.2) сохраняются и для уравнения состояния газа $p = a^2(\rho^\gamma - \rho_0^\gamma)$, $\rho_0 = \mathrm{const}$.

Свердловское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
10 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Сидоров, ПММ, 23, в. 5 (1959). [2] А. Ф. Сидоров, ПММ, 28, в. 6 (1964). [3] В. А. Сучков, ПММ, 27, в. 4 (1963). [4] Ю. А. Погодин, В. А. Сучков, Н. П. Яненко, ПММ, 22, в. 2 (1958). [5] Е. В. Ермолин, А. Ф. Сидоров, ПММ, 30, в. 2 (1966). [6] Е. В. Ермолин, Л. Н. Рубина, А. Ф. Сидоров, ПММ, 32, в. 5 (1968). [7] А. Ф. Сидоров, О. Б. Хайруллина, ПММ, 33, в. 1 (1969).