Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 4

УДК 539.311+539.313 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. С. ТАРАСЬЕВ

КОНЕЧНЫЕ ПЛОСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 25 III 1970)

Для плоского деформированного состояния идеально упругого изотропного тела приводятся разрешающие уравнения в комплексных координатах начального состояния. В отличие от работы [1], не делается каких-либо ограничений геометрического или физического характера.

1. Геометрические соотношения. Пусть W — комплексное смещение индивидуальной частицы тела при плоской деформации. Тогда соответствие между значениями $dz = ds_0 e^{i\beta_0}$, $d\eta = ds\, e^{i\beta}$ элемента этой частицы в начальном и конечном состояниях определяется соотношением

$$d\eta = dz + dW, \tag{1}$$

откуда

$$\lambda e^{i\beta} = e^{i\beta_0}(1 + W_z) + W_{\bar z} e^{-i\beta_0}, \tag{2}$$

где $\lambda = ds / ds_0$, а индексы z, $\bar z$ означают частные производные по лагранжевым комплексным координатам.

Если $\beta_0 = \theta_0$, $\beta_0 = \theta_0 + \pi / 2$ — углы, образуемые первым и третьим главным направлением деформаций в начальном состоянии с осью x_1, а $\beta = \theta_0 + \omega$, $\beta = \theta_0 + \omega + \pi / 2$ — то же в деформированном состоянии, то по формулам (2) можно получить

$$\lambda_1 e^{i\theta_0} e^{i\omega} = e^{i\theta_0}(1 + W_z) + W_{\bar z} e^{-i\theta_0}, \quad \lambda_3 e^{i\theta_0} e^{i\omega} = e^{i\theta_0}(1 + W_z) - W_{\bar z} e^{-i\theta_0},$$

где λ_1, λ_3 соответствуют главным направлениям деформации, а ω представляет в общем случае конечный угол поворота главных осей деформации в плоскости (x_1, x_3).

Складывая и вычитая последние формулы, получим

$$\begin{gathered} 1 + W_z = {}^1\!/_2(\lambda_1 + \lambda_3)\, e^{i\omega} = e^{v/2} \operatorname{ch}(\varepsilon / 2)\, e^{i\omega}, \quad v = \ln \lambda_1 + \ln \lambda_3, \\ W_{\bar z} = {}^1\!/_2(\lambda_1 - \lambda_3)\, e^{2i\theta_0} e^{i\omega} = e^{v/2} \operatorname{sh}(\varepsilon / 2)\, e^{2i\theta_0} e^{i\omega}, \quad \varepsilon = \ln \lambda_1 - \ln \lambda_3, \end{gathered} \tag{3}$$

где v, ε — плоские инварианты тензора Генки [2].

Отсюда, в частности, следует равенство

$$W_{\bar z} = \operatorname{th}(\varepsilon / 2)\, e^{2i\theta_0}(1 + W_z), \tag{4}$$

с помощью которого устанавливается связь между функцией смещений и функцией напряжений.

Исключая из уравнений (3) производные от функции смещений и переходя в полученном соотношении к сопряженным значениям, получим алгебраическую систему двух уравнений относительно величин ω_z, $\omega_{\bar z}$ с определителем, отличным от нуля. Решая эту систему, найдем

$$\begin{gathered} 2i\omega_z = e^{-v}[-(e^v \operatorname{sh} \varepsilon e^{-2i\theta_0})_{\bar z} + (e^v \operatorname{ch} \varepsilon)_z + 2ie^v(\operatorname{ch} \varepsilon - 1)\theta_{\bar z}], \\ 2i\omega_{\bar z} = e^{-v}[(e^v \operatorname{sh} \varepsilon e^{2i\theta_0})_z - (e^v \operatorname{sh} \varepsilon)_{\bar z} + 2ie^v(\operatorname{ch} \varepsilon - 1)\theta_{\bar z}]. \end{gathered} \tag{5}$$

Исключая из этих равенств производные от угла поворота, получим условие совместимости параметров деформации

$$\operatorname{Re}\{[e^{-v}(e^{v}\operatorname{sh}\varepsilon e^{2i\theta_0})_z]_z - [e^{-v}(e^{v}\operatorname{ch}\varepsilon)_{\bar z}]_z + 2i[(\operatorname{ch}\varepsilon - 1)\theta_{\bar z}]z\} = 0. \qquad (6)$$

При выводе уравнений равновесия потребуются выражения производных от функции смещений по комплексным координатам $\eta = z + W$, $\bar\eta = \bar z + \overline{W}$, характеризующим положение частиц в деформированном состоянии.

Для произвольной функции $\zeta = \zeta[z(\eta, \bar\eta), \bar z(\eta, \bar\eta)]$ имеют место формулы

$$\zeta_\eta = \zeta_z z_\eta + \zeta_{\bar z}\bar z_\eta = (1 - W_\eta)\zeta_z - \overline{W}_\eta\zeta_{\bar z},$$
$$\zeta_{\bar\eta} = \zeta_z z_{\bar\eta} + \zeta_{\bar z}\bar z_{\bar\eta} = -W_{\bar\eta}\zeta_z + (1 - \overline{W}_{\bar\eta})\zeta_{\bar z}.$$

Полагая в этих формулах вначале $\zeta = W$, а затем $\zeta = \overline{W}$, получим алгебраическую систему уравнений относительно производных функции смещений W по переменным η, $\bar\eta$. Решением этой системы будут выражения

$$1 - W_\eta = e^{-v/2}\operatorname{ch}(\varepsilon/2)e^{-i\omega}, \quad \overline{W}_\eta = e^{-v/2}\operatorname{sh}(\varepsilon/2)e^{-2i\theta_0}e^{-i\omega}. \qquad (7)$$

2. Физические законы. Будем предполагать, как и в работе ([3]), что существует упругий потенциал напряжений, рассчитанный на единицу объема недеформированной частицы тела. Приращение потенциала представляется через истинные главные напряжения и логарифмические деформации $h_k = \ln\lambda_k$ ([2]) в виде ([3, 4])

$$\delta A = (1 + \Delta)\sigma_k\delta h_k,$$

где Δ — относительное изменение объема частицы.

Для плоской деформации $h_2 = 0$, и приращение потенциала приобретает вид

$$\delta A = e^{v}\Sigma\delta v + e^{v}T\,\delta\varepsilon,$$

где $\Sigma = {}^1/_2(\sigma_1 + \sigma_3)$, $\mathrm{T} = {}^1/_2(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Так как δA является полным дифференциалом, то

$$e^{v}\Sigma = \partial A/\partial v, \quad e^{v}\mathrm{T} = \partial A/\partial\varepsilon. \qquad (8)$$

Если, в частности, потенциал напряжений представляется аналитическими рядами по четным степеням характеристик h_0, h изменения объема и изменения формы ([3])

$$A = K({}^1/_2h_0^2 + {}^1/_4k_3h_0^4 + \ldots) + 6G({}^1/_2h^2 + {}^1/_4g_3h^4 + \ldots),$$

то

$$e^{v}\Sigma = \frac{G}{1-2\nu}\left[v + \frac{1-2\nu}{G}\left(Kk_3 + \frac{Gg_3}{54}\right)v^3 + (1-2\nu)\frac{g_3}{18}v\varepsilon^2 + \ldots\right],$$
$$e^{v}\mathrm{T} = G\left[\varepsilon + \frac{g_3}{6}\varepsilon^3 + \frac{g_3}{18}\varepsilon v^2 + \ldots\right], \quad \nu = \frac{1}{2}\frac{3K-2G}{3K+G}. \qquad (9)$$

Обратные зависимости, определяемые по правилам обращения аналитических рядов, имеют вид

$$v = (1-2\nu)t_0 - (1-2\nu)^3\left[\frac{K}{G}k_3 + {}^1/_{54}g_3\right]t_0^3 - {}^1/_{18}(1-2\nu)^2g_3t_0t^2 + \ldots,$$
$$\varepsilon = t - {}^1/_{18}(1-2\nu)^2g_3tt_0^2 - {}^1/_6g_2t^3 + \ldots, \quad t_0 = e^{v}\Sigma/G, \quad t = e^{v}\mathrm{T}/G. \qquad (10)$$

3. Функция напряжений. Уравнения равновесия в координатах конечного состояния в комплексной форме имеют классический вид

$$\Sigma_{\bar\eta} + (\mathrm{T}e^{2i\theta})_\eta + {}^1/_2\rho\overline{F} = 0, \qquad (11)$$

где ρ, F — плотность и комплексная массовая сила.

Переходя в уравнении (11) от дифференцирования по координатам η, $\bar\eta$ к дифференцированию по начальным координатам z, $\bar z$ и используя при этом формулы (7), найдем

$$\operatorname{ch}(\varepsilon/2)\Sigma_z - \operatorname{sh}(\varepsilon/2)e^{2i\theta_0}\Sigma_{\bar z} + \operatorname{ch}(\varepsilon/2)(\mathrm{T}e^{2i\theta_0})_z + 2\operatorname{ch}(\varepsilon/2)\mathrm{T}e^{2i\theta_0}i\omega_z -$$
$$- {}^1/_2\operatorname{sh}\varepsilon/2e^{-2i\theta_0}(\mathrm{T}e^{2i\theta_0})_{\bar z} + 2\operatorname{sh}(\varepsilon/2)\mathrm{T}i\omega_{\bar z} + {}^1/_2 e^{v/2}\rho F e^{-i\omega} = 0.$$

Умножим сначала это уравнение на $\operatorname{ch}(\varepsilon/2)$, затем, предварительно перейдя к сопряженному выражению этого уравнения, на $\operatorname{sh}(\varepsilon/2)e^{2i\theta_0}$. Складывая полученные уравнения и пользуясь формулами (5), находим

$$\operatorname{ch}\varepsilon\{\Sigma_{\bar z} + (\mathrm{T}e^{2i\theta_0})_z + \mathrm{T}e^{2i\theta_0}v_z - \mathrm{T}\varepsilon_{\bar z}\} - \operatorname{sh}\varepsilon e^{2i\theta_0}\{\Sigma_z + (\mathrm{T}e^{-2i\theta_0})_{\bar z} +$$
$$+ \mathrm{T}e^{-2i\theta_0}v_{\bar z} - T\varepsilon_z\} + {}^1/_{12}\rho e^{v/2}[F\operatorname{ch}(\varepsilon/2)e^{-i\omega} - \bar F\operatorname{sh}(\varepsilon/2)e^{2i\theta_0}e^{i\omega}] = 0.$$

Если в этом уравнении перейти к сопряженному выражению, то получим систему двух алгебраических уравнений относительно сопряженных дифференциальных операторов. Решая эту систему и умножая результат на e^v, получим

$$(e^v\Sigma)_{\bar z} + (e^v\mathrm{T}e^{2i\theta_0})_z - (e^v\Sigma v_{\bar z} + e^v\mathrm{T}\varepsilon_{\bar z}) = \rho_0\{\operatorname{sh}(\varepsilon/2)e^{-2i\theta_0}(F\operatorname{ch}(\varepsilon/2)e^{-i\omega} -$$
$$-\bar F\operatorname{sh}(\varepsilon/2)e^{-2i\theta_0}e^{i\omega}) - \operatorname{ch}\varepsilon(\bar F\operatorname{ch}(\varepsilon/2)e^{i\omega} - F\operatorname{sh}(\varepsilon/2)e^{2i\theta_0}e^{-i\omega})\}. \quad (12)$$

Замечая, что, вследствие соотношений (8), выражение

$$e^v\Sigma v_{\bar z} + e^v\mathrm{T}\varepsilon_{\bar z} = A_{\bar z}$$

представляет частную производную потенциала напряжений по комплексной координате, и опуская в (12) массовые силы, приходим к уравнению равновесия в комплексной форме, по структуре напоминающему классическое

$$(e^v\Sigma - A)^{-} + (e^v\mathrm{T}e^{2i\theta_0})_z = 0. \quad (13)$$

Последнему уравнению можно удовлетворить введением обобщенной функции напряжений

$$e^v\Sigma = 2pU_{z\bar z} + A, \quad e^vTe^{2i\theta_0} = -2pU_{\bar z\bar z}. \quad (14)$$

где p — характерное постоянное напряжение.

Подставляя значение $e^v e^{2i\theta_0}$ в условие совместности (6), приходим к нелинейному дифференциальному уравнению относительно обобщенной функции напряжений

$$\operatorname{Re}\left\{\left[e^{-v}\left(p\frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\mathrm{T}}U_{\bar z\bar z}\right)_z\right]_z + \frac{1}{2}[e^{-v}(e^v\operatorname{ch}\varepsilon)_{\bar z}]_z +\right.$$
$$\left. + \frac{p^2}{(e^v\mathrm{T})^2}(\operatorname{ch}\varepsilon)_{\bar z}(U_{\bar z\bar z}U_{zzz} - U_{zz}U_{\bar z\bar z\bar z})\right\} = 0. \quad (15)$$

Это уравнение получено без каких-либо ограничений геометрического и физического характера, при одном лишь предположении о существовании потенциала внутренних сил. Используя в этом уравнении конкретные физические законы, например законы (9) или иные, можно получить разнообразные варианты разрешающего уравнения теории плоского деформированного состояния.

Использованием последнего соотношения из уравнений (14) в формуле (4) получаем связь между комплексной функцией смещений и обобщенной функцией напряжений

$$W_{\bar z} = -2p\frac{\operatorname{th}(\varepsilon/2)}{e^v\mathrm{T}}U_{\bar z\bar z}(1 + W_z). \quad (16)$$

Это соотношение также справедливо при произвольных упругих физических законах. Из него можно получить в последовательных приближениях геометрические граничные условия.

4. Статистические граничные условия. Если $p\sigma_n$, $p\tau_n$ — истинные нормальные и касательные напряжения на деформированном контуре с нормалью $n(\cos\alpha, \sin\alpha)$, то

$$\Sigma + \mathrm{T}e^{2i(\theta-\alpha)} = p(\sigma_n + i\tau_n). \quad (17)$$

Для контурного волокна ($\lambda = \lambda_\tau$) по формуле (2) найдем

$$\lambda_\tau e^{i\alpha} = e^{i\alpha_0}(1 + W_z) - W_{\bar{z}} e^{-i\alpha_0}, \tag{18}$$

где α_0 — угол между нормалью к начальному контуру и осью x_1.

Возводя (18) в квадрат и подставляя в (17), получим

$$\begin{gathered} p\sigma_n \lambda_\tau^2 = \lambda_\tau^2 \Sigma + e^v \mathrm{T}[-\operatorname{sh}\varepsilon + \operatorname{ch}\varepsilon \cos 2(\theta_0 - \alpha_0)], \\ p\tau_n \lambda_\tau^2 = e^v \mathrm{T} \sin 2(\theta_0 - \alpha_0). \end{gathered} \tag{19}$$

Учитывая, что на контуре имеет место геометрическое соотношение

$$ie^{-i\alpha_0} dU_{\bar{z}} / ds_0 = U_{z\bar{z}} e^{-2i\alpha_0} - U_{\bar{z}\bar{z}},$$

получим с привлечением формул (14), (18), (19) статические граничные условия для функции напряжений

$$dU_{\bar{z}} / ds_0 = {}^1/_2 e^v (\sigma_n + i\tau \operatorname{ch}\varepsilon) ie^{i\alpha_0} - p\tau_n \operatorname{sh}\varepsilon / \mathrm{T} U_{\bar{z}} e^{-i\alpha_0} - ie^{-i\alpha_0} A / 2p. \tag{20}$$

5. Главный вектор и главный момент. Выражения главного вектора и главного момента усилий, приложенных к произвольной дуге деформированного контура, имеют вид

$$P = p \int_{L_0} (\sigma_n + i\tau_n) [(1 + W_z') e^{i\alpha_0} - W_{\bar{z}}' e^{-i\alpha_0}] ds_0, \tag{21}$$

$$M = -p \operatorname{Re} \left\{ \int_{L_0} (\sigma_n + i\tau_n)(\bar{z}' + \overline{W}') [(1 + W_z') e^{i\alpha_0} - W_{\bar{z}}' e^{-i\alpha_0}] ds_0, \right. \tag{22}$$

где штрих означает принадлежность к контуру, а интегрирование осуществляется по недеформированному контуру L_0.

Уравнениями (14), (15), (16), (20), (21), (22) и физическими законами $v = f_1(e^v \Sigma, e^v \mathrm{T})$, $\varepsilon = f_2(e^v \Sigma, e^v \mathrm{T})$ полностью исчерпывается постановка задач плоской деформации идеально упругого изотропного тела.

Для решения конкретных задач рекомендуется использовать процедуру малого параметра ([3]) и конформных отображений ([6]).

В результате расчетов получено с учетом трех приближений для физических законов (10) выражение коэффициента концентрации напряжений $\varkappa = \sigma_2 : p$ на краю цилиндрической в начальном состоянии полости

$$\varkappa = \frac{\sigma_2}{p} = \pm 2 \left[1 + \frac{1}{8(1 - \nu)} \frac{p}{G} + \frac{17 - 20\nu - 6g_3(1 + \nu - 2\nu^2)}{288(1 - \nu)^2} \frac{p^2}{G} \right]$$

где σ_2 — максимальное напряжение, а p — однородная нагрузка на бесконечности.

Второй член в последней формуле учитывает главным образом геометрическую нелинейность, а третий — и физическую посредством константы k_3, g_3. Анализ показывает, что величина коэффициента концентрации напряжений зависит от знака нагрузки на бесконечности.

Тульский политехнический институт

Поступило 18 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. С. Тарасьев, Л. А. Толоконников, Прикладная механика, в. 2 (1966). [2] Л. И. Седов, Введение в механику сплошной среды, М., 1962. [3] Г. С. Тарасьев, ДАН, 187, № 1 (1969). [4] Л. А. Толоконников, ПММ, 21, в. 6 (1957). [5] В. В. Новожилов, ПММ, 15, в. 6 (1951). [6] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966.